Research Article

Reflections from a Learning Environment Supporting Algebraic Reasoning of Eighth Grade Students

Deniz Adıyaman[a] and Derya Çelik[b]

[a]Trabzon Yomra Merkez Middle School, Turkish Ministry of Education, Trabzon, Turkey (ORCID: 0009-0000-5503-234X)
[b]Trabzon University, Fatih Faculty of Education, Trabzon, Turkey (ORCID: 0000-0003-2043-4431)

Article History: Received: 16 August 2024; Accepted: 27 November 2024; Published online: 31 December 2024

Abstract: The aim of this study is to present reflections from a classroom environment that supports students' algebraic reasoning. Using the action research method, the study was conducted with 25 students (12 girls and 13 boys) in the 8th grade at a middle school in Trabzon. Within the scope of the study, the components of algebraic reasoning and the indicators reflecting these components were first identified. Then, taking these indicators into consideration, a planning of approximately 10 lesson hours was made and implemented for three objectives belonging to the algebra learning domain at the 8th grade level. Data were collected and analyzed with the help of video recordings, students' written solutions and field notes. The results of the study revealed that students (i) were generally successful in making connections and relationships and using different representations, (ii) needed support in critical thinking and making inferences and had difficulties in making individual decisions, and (iii) had the most problems in using symbols meaningfully and making sense of algebraic ideas, thoughts and approaches. The basis of these difficulties was found to be the students' readiness about algebra.

Keywords: Algebraic reasoning, Classroom practice, Middle school students, Linear relations and equations

Öz: Bu çalışmanın amacı öğrencilerin cebirsel akıl yürütmelerini destekleyen bir sınıf içi ortamdan yansımalar sunmaktır. Eylem araştırması yönteminin kullanıldığı çalışma Trabzon ilinde bir ortaokulda 8. Sınıfta öğrenim gören olan 25 öğrenci (12 kız, 13 erkek) ile yürütülmüştür. Çalışma kapsamında ilk olarak cebirsel akıl yürütme bileşenleri ve bu bileşenleri yansıtan göstergeler belirlenmiştir. Ardından bu göstergeler dikkate alınarak 8. sınıf düzeyinde cebir öğrenme alanına ait üç kazanıma dönük yaklaşık 10 ders saatlik bir planlama yapılmış ve uygulanmıştır. Veriler video kayıtları, öğrencilerin yazılı çözümleri ve alan notları yardımıyla toplanmış ve analiz edilmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlar; öğrencilerin (i)bağlantı ve ilişki kurma ile farklı gösterimleri kullanmada genel anlamda başarılı olduğunu, (ii) eleştirel düşünme ve çıkarımda bulunmada desteklenmeye ihtiyacı olduğunu ve bireysel karar vermede zorlandıklarını, (iii) en fazla problemi ise sembolleri anlamlı kullanma ile cebirsel fikirleri, düşünceleri, yaklaşımları anlamlandırmada yaşadıklarını ortaya koymuştur. Bu zorlukların temelinde ise öğrencilerin cebir ile ilgili hazır bulunuşlukları olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel akil yürütme, Sınıf içi uygulama, Ortaokul öğrencileri, Doğrusal ilişki ve denklemler

Türkçe sürüm için tıklayınız

1. Introduction

Algebraic thinking, in the most general sense, can be defined as the ability to make sense of algebraic concepts (variables, equations, equations, inequalities, inequalities, functions, etc.) and mathematical processes (generalizing, representing, reasoning, and supporting) and use them appropriately (Çelik, 2007; Blanton et al., 2017). This thinking skill is not only a powerful tool in solving various problems, but also has special importance in terms of reaching and formulating generalizations that are considered the heart of mathematics. Algebraic reasoning, as a special aspect of this way of thinking, can be expressed as the ability of students to make systematic and logical inferences on algebraic expressions and relationships through different representations. In other words, while algebraic thinking refers to a broader conceptual framework, algebraic reasoning is the application of this framework in a logical way.

Algebraic thinking and reasoning are among the basic skills targeted to be developed in mathematics education reforms implemented in Turkiye and abroad in recent years. In international assessment exams such as TIMSS, algebra is one of the areas in which students perform poorly in Turkiye as well as in many other countries (Ministry of National Education [MoNE], 2020). This situation reveals the importance of reform activities focused on developing algebraic thinking skills. In Turkiye, the Secondary School Mathematics Curriculum (MoNE, 2018; 2024) sets the development of students' mathematical thinking and problem solving skills, and their ability to make mathematical relationship and generalizations as a primary goal. Similarly, it is also found in various curriculum sources that algebraic thinking should be a fundamental element of mathematical education from an early age (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2020; Ontario Ministry of Education [OME], 2013). However, the effective implementation of these goals stated in the curricula in classroom practices requires teachers to adopt innovative and student-centered methods in their pedagogical approaches.

Corresponding Author: Derya Çelik **email:** deryacelik@trabzon.edu.tr

Citation Information: Adıyaman, D. & Çelik, D. (2024). Reflections from a learning environment supporting algebraic reasoning of eighth grade students. *Turkish Journal of Mathematics Education, 5*(3), 96-122.

This study was shaped by the first author, a middle school mathematics teacher in a public school, who realized the need for more effective practices to support algebraic thinking in general and algebraic reasoning more specifically in his classroom practices. In this context, the action research method was used to evaluate the reflections of the intervention in the learning environment and to provide suggestions for improving classroom practices. The study aims to share the experiences and findings obtained in this process by focusing on classroom practices aimed at developing algebraic thinking and reasoning skills..

1.1. Algebraic Reasoning

In a general sense, reasoning can be defined as the process of reaching a conclusion by considering all the components of an existing situation (Umay, 2003; Umay & Kaf, 2005). More specifically, mathematical reasoning can be defined as making valid inferences on the basis of knowledge and evidence by determining the relationship between numbers, expressions, quantities and shapes, and by relating different elements of knowledge, related representations and processes (MoNE, 2005; MoNE 2013). In this context, mathematical reasoning is a part of mathematical thinking (O'Daffer & Thornquist, 1993) and one of the most important components of mathematical thinking, which involves drawing conclusions and making generalizations about ideas and their relationships.

According to Umay (2003), mathematical reasoning can be named as algebraic, proportional, geometric and statistical in terms of a specific content area. In the most general sense, algebraic reasoning refers to the ability to make logical inferences from mathematical expressions and symbols, to understand relationships, and to reach conclusions that lead to generalizations through these relationships. Algebraic reasoning is defined by Herbert and Brown (1997) as expressing mathematical knowledge in words, diagrams, tables, graphs and symbols; forming and testing hypotheses with this knowledge; analyzing and evaluating relationships. Kaput (1999) defined algebraic reasoning as the ability to make generalizations and form hypotheses based on mathematical operations and relationships. Ellis (2011) defines algebraic reasoning as the process of making generalizations, expressing these generalizations mathematically and applying them to new situations. Based on these definitions, it can be said that algebraic reasoning is an abstract process that involves understanding, interpreting, analyzing and generalizing mathematical knowledge.

Kaput (1999) also mentions five different forms of algebraic reasoning. These can be expressed as (i) generalization from patterns, (ii) meaningful use of symbols, (iii) studying structures in the number system, (iv) working with functions, and (v) mathematical modeling process that will combine these four items. As a result of the literature review based on this classification, the basic components of algebraic reasoning can be summarized as follows.

Recognizing and Generalizing Patterns: Pattern recognition is the starting point of algebraic reasoning. Students form general statements by analyzing the relationship between numbers, shapes or variables. Kaput (2008) described this skill as the cornerstone of algebra learning.

Making sense of the different roles and uses of letter symbols: Central to algebraic reasoning is understanding the meaning of letter symbols and their varying roles (unknown, variable, parameter, constant, etc.). Letter symbols can have more than one role in a mathematical expression or relationship, and this is important for representation, generalization, and problem solving. Knuth et al. (2005) stated that the comprehension of letter symbols directly affects students' level of reasoning with mathematical symbols.

Making sense of and using multiple representations: The ability to express mathematical expressions in different forms and to transition between these representations is an important indicator of algebraic thinking. Bağdat and Anapa-Saban (2014) found that students' ability to interpret algebraic expressions in different forms such as tables, graphs or verbal expressions strengthens their mathematical understanding. Algebraic reasoning involves making logical transitions between multiple representations (tables, graphs, etc.) by making sense of the meanings of symbols (Baghdad & Anapa-Saban, 2014).

Problem solving and working with functions: Algebraic reasoning plays a key role in analyzing the structure of problems and generating solutions. Here, the student generates a solution to the problem by using symbolic expressions or relationships appropriate to the problem context. One of the main indicators of algebraic reasoning is that students identify functional relationships, analyze the current situation using these relationships and offer solutions (Kaput, 1999; Van De Walle, Karp & Bay-Williams, 2014).

Critical thinking and faultfinding: Students' ability to make algebraic generalizations and to use a logical framework to justify these generalizations is an indicator of algebraic reasoning. However, the accuracy and validity of generalizations can be assured when they are critically examined. Students can avoid erroneous assumptions by critically evaluating their generalizations (Ellis, 2011). The main rationale for this arrangement was that critical thinking in mathematics supports students' ability to recognize errors and offer alternative solutions (Dede & Argün, 2003; Stacey, 2006; Mason, Burton & Stacey, 2010) and that this thinking is a fundamental tool in algebraic reasoning.

In conclusion, algebraic reasoning involves students' understanding of mathematical abstractions, their ability to think with symbols, and their ability to use these skills effectively in problem solving. Developing these components in students is critical in advancing their mathematical thinking skills. The components presented here are important and necessary to identify the actions that should be taken in a learning environment that supports algebraic reasoning.

1.2. Rationale and Importance of the Research

Algebraic reasoning is of critical importance not only in mathematics education but also in fields such as physics, chemistry, engineering and economics. Because this skill allows individuals to analyze complex systems and produce generalizable solutions in different contexts through abstraction (Kaput, 2008).

In the international literature on algebra learning, algebraic thinking and reasoning, studies on understanding algebraic symbols (Capraro & Joffrion, 2006; Knuth et al., 2005), examining algebraic reasoning skills (Ellis, 2011), and ways teachers can create classrooms that support algebraic reasoning skills (Blanton & Kaput, 2005) stand out. For example, Ellis (2011) stated that understanding functions and functional relationships is a critical step in algebraic reasoning. Blanton and Kaput (2005) observed a significant improvement in students' algebraic reasoning skills by integrating algebraic reasoning activities into lessons during their year-long study.

Among the studies conducted in Turkiye, examining algebraic reasoning skills (Bike-Kalkan, 2014; Kaya & Keşan, 2017), evaluating the effects of different algebra teaching approaches (Kanbir, 2016) and eliminating algebraic misconceptions (Erdem & Sarpkaya-Aktaş, 2018) draw attention. Kaya and Keşan (2017) emphasized that students are inadequate in algebraic reasoning, although algebra is a mental activity that is not limited to mathematics courses but extends to all areas of life. Öz (2017) found that students generally adopt an algorithm-based approach in algebra learning processes and that teachers offer limited opportunities to support students' mathematical reasoning skills.

In light of these data, teaching processes and learning environments need to be restructured to specifically support students' algebraic reasoning skills. It is important for teachers to adopt an approach to develop students' understanding and mathematical thinking skills (Leitze & Kitt, 2000). However, in the literature, it is understood that there is still a significant need for studies that examine the practices of algebraic reasoning and the reflections of these practices in the classroom environment. In order to address this need in the literature, this study aims to “design a learning environment that aims to support eighth grade students' algebraic reasoning skills and present reflections from this environment. This kind of research can make important contributions to the field of mathematics education both theoretically and practically. On the one hand, it can contribute to the literature on the design of effective learning environments that support the development of algebraic reasoning. On the other hand, it can guide the development and implementation of innovative teaching strategies for teachers.

2. Method

This study aims to present reflections from a classroom environment that supports students' algebraic reasoning. The study was conducted as action research to observe and evaluate how this learning environment supports students' algebraic reasoning. Action research involves the systematic collection and analysis of data by a practitioner himself/herself or together with a researcher in order to identify problems that arise during the implementation process or to find a solution to an existing problem (Karasar, 2009). In this study, the first author, based on his own teaching experiences, determined that the in-class learning-teaching activities were far from the focus of basic mathematical skills targeted by the middle school mathematics curriculum and that this was not a situation that occurred only in his own classrooms. This problem, which emerged in classroom practices, led the researcher to face the question of “how can I bring thinking skills (specifically reasoning) to the center of my lessons” and to search for a solution and to evaluate this solution. For this reason, the action research method was adopted in the study, in which the implementation was evaluated with the participation of practitioners and those at the center of the problem and measures were taken to improve the current situation.

2.1. Participants

The study was conducted with 25 (12 girls and 13 boys) 8th grade students in a middle school in Trabzon. The relative intensity of algebra expectations at the eighth grade level compared to other grades was one of the main reasons for conducting the study at this grade level. In addition, the first author was responsible for two eighth-grade classes, one seventh-grade class, and one sixth-grade class. The aim of minimizing teacher-student related factors in the pilot and main study was another factor in the selection of eighth grade classes. The two eighth grades in the pilot study and the main study had similar characteristics in terms of both the physical characteristics of the classroom environment and academic achievement in mathematics.

2.2. Research Design and Process

The flow chart of the action plan of this study, in which the action research method was used, is given in Figure 1. The study was conducted in three successive phases. These are: planning, action and data collection, reflection.

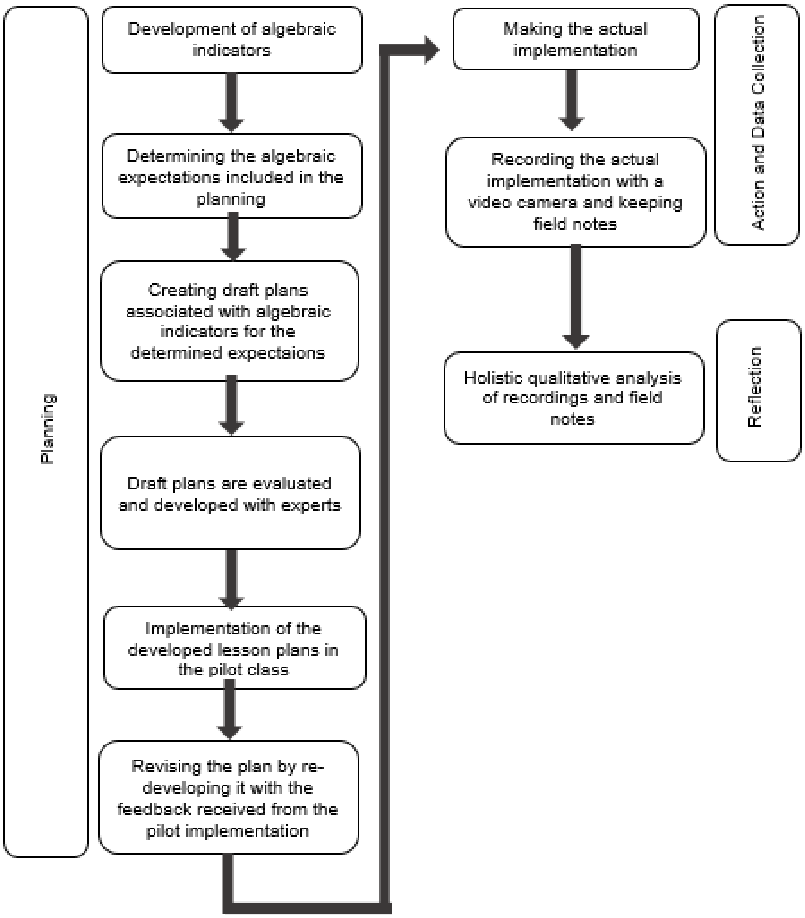


Figure 1. Flowchart of the research action plan

Planning: This is the phase in which decisions regarding the solution of the problem are taken after its identification. First of all, the indicators of algebraic reasoning components were determined by taking into account the characteristics of the relevant level of education. Then, lesson plans integrating these indicators were developed and piloted in an eighth grade class consisting of 24 students (12 girls and 12 boys).

Action and Data Collection: This is the phase in which the implementation was carried out in the main group according to the lesson plans organized after the pilot implementation. A total of 10 lesson hours of implementation was carried out for three objectives related to algebra learning domain in the curriculum. The implementations were carried out under the responsibility of the first author and all lessons were recorded by video. In addition, the researcher took field notes in the classroom and immediately at the end of the lesson to be used during the analysis of the video recordings.

Reflection: This is one of the most important phases of action research. At this phase, the effectiveness of the lesson planned to support algebraic reasoning was evaluated in a systematic framework. Each application was reflected on two main points: 'evaluating the students' achievement of the objectives of the course in terms of algebraic reasoning indicators' and 'providing suggestions for the course to be more successful in achieving the objectives'.

2.2.1. Formation of Algebraic Reasoning Indicators

In line with the main purpose of the study, algebraic reasoning indicators were formed with the support of the literature in order to observe and evaluate students' algebraic reasoning skills. For this, the following three steps were followed.

Step One: In this step, a literature review was conducted on algebraic thinking and algebraic reasoning. The definitions of algebraic reasoning, which is basically understood as a functional extension of algebraic thinking skill within a logical framework, were examined, and then the components of algebraic reasoning presented under the heading 1.1. Algebraic Reasoning

Step Two: In this step, the key concepts and/or processes belonging to the components of algebraic reasoning identified in the previous step (understanding the meaning, structure and use of the concept of equality, identifying functional relationships, using different representations, making connections between data, etc.) were first identified. Then, taking into account the relevant level of education, draft indicators were developed under these components.

Step Three: In this step, the components of algebraic reasoning and the indicators defining these components were examined by an expert researcher. As a result of this review, the following adjustments were made. The final version of the indicators in this study is shown in Table 1.

Table 1. Algebraic reasoning components and indicators

Components	**Indicators**
CA: Making Sense of Algebraic Ideas, Thoughts, and Approaches	CA1: Ask questions to eliminate disagreements and misunderstandings.
BK: Making Connections and Relationships	BK1: Makes assumptions about the relationships between data and justifies, proves or refutes assumptions BK2: Formulate and support generalizations using relationships between data.
FG: Using Multiple Representations	FG1: Presents mathematical knowledge in words, tables, graphs and symbolic representations FG2: Establishes relationships between different representations and transitions from one representation to another
SK: Using Symbols Meaningfully	SK1: Express generalizations algebraically SK2: Constructs and solves equation/equation system. SK3: Knows the meanings and uses of symbols (operations such as +, -, :, x, = and letter symbols such as a, b, x, ...)
ED: Critical Thinking	ED1: Compare, interpret and draw conclusions from representations of different contexts. ED2: Analyze their own mistakes
FC: Working with Functions	FC1: Constructs functional relationships FC2: Analyzes the current situation using functional relationships and offers solutions.

1) In some cases, the component names are more inclusive. For example, the component “Recognizing and Generalizing Patterns” has been reorganized as “Making Connections and Relationships” in order to include situations where the context studied is not in the form of a pattern.

2) Some indicators that are considered to serve the same purpose under the components were combined. For example, under the heading “Making Connections and Relationships”, the two indicators “Makes assumptions about the relationships between data and provides examples that support or refute the assumption” and “ Verifies and proves assumptions” were combined and organized as “Makes assumptions about the relationships between data and justifies, proves or refutes assumptions”.

3) Important but implicit situations in terms of algebraic reasoning were brought to the forefront. For example, the realization of algebraic reasoning in the form of analyzing algebraic expressions/relationships, making logical inferences, and using symbols and operations effectively in problem solving processes requires first making sense of the algebraic thinking/ideas/approaches in question. In this respect, a component called “Making Sense of Algebraic Ideas, Thoughts, and Approaches” and an indicator related to this component was added in the form of asking questions to eliminate situations that are not understood or misunderstood in the given context.

2.2.2. Development of Lesson Plans

Various teaching resources (mathematics textbooks, Education Informatics Network [EBA], etc.) and literature were used for the three objectives in the algebra learning domain in the eighth grade mathematics curriculum. Algebraic indicators were integrated into the lesson plans in order to systematically guide students towards algebraic reasoning. A total of five lesson plans were developed. Table 2 shows the lesson plans developed based on the objectives in the curriculum, the algebraic reasoning indicators associated with these lesson plans, and the implementation periods.

Table 2. Expectations and related lesson plans

Expectations	Lesson Plans	Indicators	Time (minutes)
Construct and interpret tables, graphs and equations of real life situations involving linear relationships	Linear Relations and Real Life-1	CA1, BK1, BK2, FG1, FG2, SK1, SK3, ED2, FC1, FC 2	40+40=80 dk
	Linear Relations and Real Life-2	CA1, BK1, BK2, FG1, FG2, SK1, SK3 ED1, ED2, FC1, FC2	40+40=80 dk
Solves systems of linear equations in two unknowns	Systems of Linear Equations-3	CA1, FG1, FG2, SK2, SK3, ED2	40+40=80 dk
Relate the solutions of systems of linear equations to the graphs of the lines corresponding to these equations	Systems of Linear Equations and Graphs -4	CA1, FG1, FG2, SK2, SK3, ED1, ED2, FC1, FC2	40+40=80 dk
	Systems of Linear Equations and Graphs -5	CA1, FG1, FG2, SK2, SK3, ED1, ED2, FC1,FC2	40+40=80 dk

In the process of developing the lesson plans, first, a draft lesson plan was developed by considering the objectives and algebraic indicators together. Then, the draft plans were evaluated in line with the opinions of an expert mathematics educator who teaches reasoning skills at the graduate level. These evaluations were based on three main criteria: (i) compliance with the learning objectives, (ii) support for the targeted algebraic indicators, and (iii) appropriateness to the grade level and teaching principles. For each lesson plan, approximately 30-minute interviews were conducted with the relevant expert and these interviews were recorded with a voice recorder. After the interview recordings were analyzed by two researchers, necessary corrections were made to the lesson plans. Finally, the revised lesson plans were piloted in an eighth grade class of 24 students and finalized before the actual implementation.

2.3. Data Collection Tools

Data collection methods in action research may vary according to the research questions, research situation and the competences of the researcher (Kuzu, 2009). It is also stated that more than one data collection method can be used in action research in order to obtain various data that support each other. In this study, video recordings of classroom practices and field notes were used as data collection tools.

Video Recordings: Journals, field notes, video recordings can be used in action research in terms of providing a valid and diverse point of view. In particular, video recordings allow the research process to be repeatedly watched and better analysed, enabling researchers to make accurate reflections on the learning environment (Sherin, Linsenmeier & van Es, 2009). During the actual implementation, a camera was used to record the general classroom environment and a handheld camera was used to record what the students did in their notebooks and their dialogs with the teacher. Approximately 80x5=400 minutes were recorded during the actual implementation with the camera recording the overall lesson flow. Together with the handheld camera, a total of over 500 minutes of video was recorded.

Field Notes: In qualitative research methods, field notes are one of the most frequently used data collection tools for rich description and elaboration. In this study, the field notes taken during and immediately after the lesson in the actual implementation were guiding both to provide evidence of the course's support for algebraic reasoning skills and to identify focal points while analyzing the video recordings.

2.4. Data Analysis

The video recording and the field notes taken by the researcher were analyzed qualitatively in a holistic manner. The main reference for this analysis process was the algebraic reasoning components/indicators. In the analysis process, the researchers search for evidence for the following two conditions: (i) how the learning environment supports/ inhibits students in terms of the algebraic reasoning indicators it targets, and (ii) how the learning environment can be made more effective in terms of achieving its goals. Excerpts from classroom dialogues and field notes were used to describe this evidence.

2.5. Research Ethics

All participants provided informed consent prior to their involvement in the study. They all were informed about the aim of the study and their right to withdraw at any time without consequence. Since the data were collected before 2020, no additional ethical approvement was required.

3. Findings

The findings obtained from the in-class applications of the developed learning environment are presented by considering the algebra reasoning components.

3.1. Making Sense of Algebraic Ideas, Thoughts, and Approaches

Making sense of algebraic thoughts, ideas and approaches is essentially an action that takes place in the student's mind, and in this process, students are expected to ask questions to eliminate situations that are not understood or misunderstood. Another way to contribute to the process of making sense is for the teacher to support students' questioning about what is going on with key questions. This perspective was reflected in all lesson plans and an effort was made to create an environment that would enable students to express and examine both their own ideas/solutions and those of their peers. In this environment, students were frequently asked "why, for what purpose" questions.

In the development part of the lesson, which is taught according to the Linear Relations and Real Life-1 lesson plan, students are asked to formulate the change of the volume of water poured into a container according to time. Initially there is 100 ml of water in the container and 50 ml of water flows into the container every second. In order to draw students' attention to the problem and help them understand the problem situation, the problem situation was read aloud to a student from the class and a very short animation was shown in the context. Students were asked to fill in the table given in Figure-2 to help them understand how the volume of water in the container changes over time.

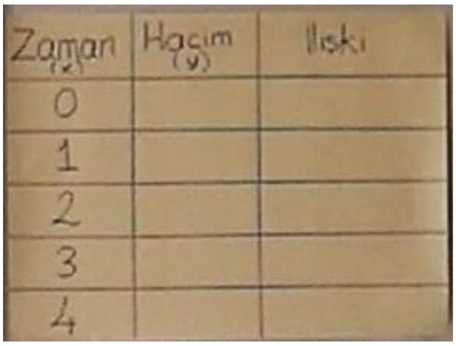


Figure 2. Time-volume table hung on the board

The following dialog took place between the teacher and the class to see the students' understanding of the contextual table representation.

Teacher: What does the zero-second in the table mean here?
Ceyda : The beginning.
Teacher: How much water was there at the beginning?
Ceyda : 100 ml.
Teacher: How much water was there in the first second?
Fatih : 150 ml.
Teacher: How much water comes in one second?
Fatih :50 ml.

While the students were filling in the table, the teacher noticed that some students focused on the height of the water instead of the volume. The teacher then directed the students to establish the relationship between height and volume.

Teacher: Is there a relationship between time and the height of the water in the container?
Students: Yes.
Teacher: How is there a relationship?
Esra: If the volume increases, the height also increases.
Teacher: So as time increases, both the volume and the height of the water increase?
Students: Yes.
Teacher: What can we say if we pay attention to the relationship between time and volume? I mean, can I think of the relationship depending on the amount of water in the beginning?
Gamze: In the first second, it is 100 plus 50.
Teacher: How much water accumulates at the end of the second second?
Selin: 150 plus 50.
Teacher: You can say that, but what if the logic is similar to what happened in the first second? Or what if you think of it in such a way that the amount of water at the beginning remains constant?
Selin: Then it would be 100 plus 100.
Teacher: Can we add what comes in each second separately?

> Selin: Yes. That would be 100 plus 50 plus 50.
> Teacher: How about the third second?
> Fatih: 100 plus 50 plus 50 plus 50 plus 50.
> Teacher: What happens in the fourth second?
> Ferhat: 100 horses plus 50 plus 50 plus 50 plus 50.
> Teacher: How can you express it differently here by showing (100+50+50)?
> Ceyda: As 100 + 2.50.

At the beginning of this dialog, the teacher aimed for the students to associate the change in height with the change in the volume of water. However, this dialog was weak in terms of contributing to the understanding of the relationship between height and volume of water by the whole class or by students who focused on height instead of volume in the problem. On the other hand, the emphasis on 50 ml of water added to the container every second contributed to the students' understanding of how one of the variables changed relative to the other. As evidence of this, the table in Figure-3 and the following dialog that the students filled in at the board can be presented.

> Teacher: What is the relationship between the time column and the relationship column?
> Esra: When I multiply the amount of increase by the time, we find what is added to 100.
> Beyza: When we break down the volumes, how many 50s there are, that many seconds have passed.
> Teacher: Then can we express it like this? We take the amount of water in the container at the beginning, 100 ml, as a constant and add 50 to it as many seconds pass.

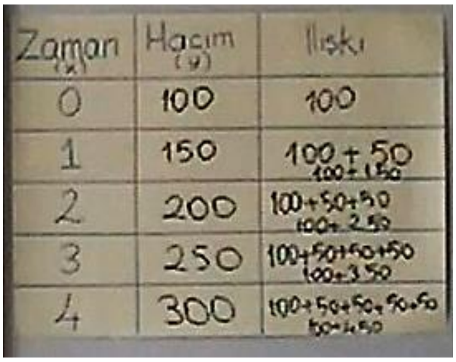


Figure 3. The table on the board filled in by the students

Regarding the process of making sense of algebraic thoughts, ideas and approaches, the teacher generally provided opportunities such as helping students understand what is given in the problem by reading the problems aloud, encouraging students to ask questions, and prompting them to think about the nature of the relationship with leading questions. However, it was observed that students were insufficient in communicating, which is one of the main developmental elements of the indicator related to this component. In addition, the lesson analysis reveals that the teacher should leave more space for students to wrap up class discussions.

3.2. Making Connections and Relationships

Linear Relations and Real Life-1 and Linear Relations and Real Life-2 courses focus on formulating assumptions about relationships between data, testing assumptions and formulating generalizations. These applications, which require students to make inferences about numerical data, the relationships between them and formulate functional relationships based on them, are very important in terms of supporting algebraic reasoning.

In both lesson plans, the process is generally planned as follows: creating a table containing the variables that are the subject of the context in the problems given to the students (in other words, obtaining numerical data), observing the change of the variables in the table relative to each other, making inferences that reveal the nature of the change, conducting a class discussion to verify/falsify these inferences, and formulating the relationship between the data in the last step. In the teacher-student dialogues that took place during the lesson, an example of which is given below, the teacher made an effort to provide guidance to help students perform these actions expressed in the making connections and relationships component.

In the processing part of the Linear Relations and Real Life-1 lesson plan, the teacher asked the students how much water would be found at the end of the 9th and 16th seconds in a container that initially contained 100 ml of water and started to be filled with water again. The dialog between the teacher and students in the classroom in the context of this question is below.

> Teacher: First of all, how much water is in the container at 9 seconds?
> Selin: 450.

Teacher: How did you find it?
Selin: I found it by doing 50+50+50+... for every second.
Teacher: Isn't there a shortcut?
Selin: Since 50 ml of water flows every second, I can find it by multiplying 9 by 50.
Engin: But there was already 100 ml of water at the beginning. I can add 100 and get 550.
Teacher: Yes, good, let's think about the 16th second.
Fatih: 100 ml was already there. I proceeded by adding 50, 50, 50... That's 900.
Teacher: For example, if I asked you about the 40th second or the 100th second, would you proceed by adding again?
Fatih: I would do that again.
Engin: There is 7 seconds difference between 16th second and 9th second. In 7 seconds, 350 ml of water flows from 7.50. I added this to 450 and added 100 ml of water at the beginning. 900 ml of water.
Emre: 800 ml of water flows from 16.50 in 16 seconds. Since there is 100 ml of water at the beginning, there is a total of 900 ml of water.

While answering the teacher's question, the students mainly used arithmetic approaches in the first stage. However, when their solution proposals were examined carefully, some of them offered solutions based on arithmetic operations (consecutive sums as adding 50 until the 9th second) by focusing only on the amount of water increase, while others carried out arithmetic operations with an emphasis on volume depending on the time variable (9.50 water flowed until the 9th second). This dialogue is an indication of the teacher's effort to both relate the time and volume variables in a concrete way and to reveal the need to obtain a general formula. However, the emphasis on the second part was not very strong. In the rest of this lesson, Selin, Engin and Emre, who were mentioned in the dialog, were successful in formulating the relationship between time and volume.

In general, in both lessons, students were able to formulate generalizations subject to the problem context. In this process, the teacher did not directly ask the students to formulate the relationship between the variables, but instead asked them to focus on how the variables change with respect to each other, to come up with ideas about change, to support these ideas, and gave them enough time to do all these. All this helped students overcome the difficulties with the connection and relationship building component.

3.3. Using Multiple Representations

This component includes indicators that require students to represent their mathematical knowledge in different representations and to make transitions from one representation to another. These indicators help students express and concretize their algebraic ideas. The indicators belonging to this component were included in all lesson plans; in other words, students were encouraged and supported to perform these actions.

In the first two lesson plans, context, table and algebraic representation and the transitions between them were emphasized, while in the other three lesson plans, table, graph and algebraic representation and the transitions between them were emphasized.

In the problem in the introduction part of the Linear Relations and Real Life-1 lesson plan, students are expected to find the values of y=2x-1 depending on the x values given in the table and express them in ordered pairs as (x,y). Many students were able to fill in the table correctly. For the students who had difficulty in filling in the table, the relationship between y and x was emphasized again. After completing the table, students were asked what the symbolic representation (x,y) means and what it expresses. Here, it was aimed to direct them to the idea that these ordered pairs represent a point in the coordinate system and to make a transition to the line graph. The students said that these pairs are points in the coordinate system. At this point, students were asked to connect the (x,y) ordered pairs they found by marking them on the coordinate system on their worksheets. The image of Esra's worksheet, who created the line graph appropriately, is given in Figure 4. Most of the students in the class were able to draw the line graph in a similar way. Referring to ordered pairs in the transition from the table to the graph not only made it easier for the students, but also helped them understand the idea that the graph is actually made up of these points.

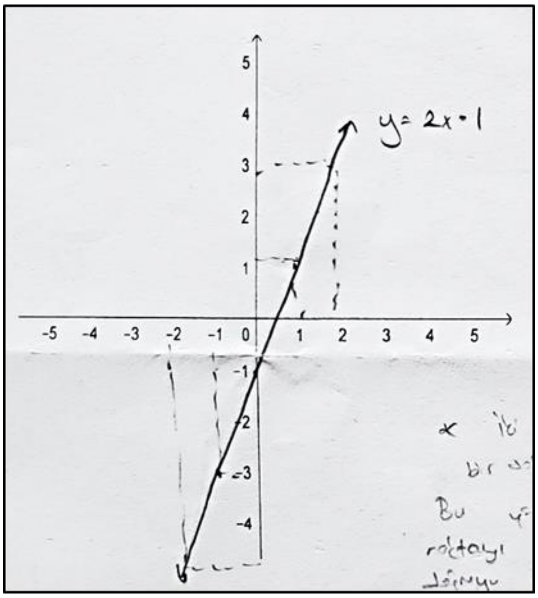


Figure 4. The graph Esra created in her notebook

As the lesson continued, the teacher asked the students some questions about the line they had drawn. The following dialog reflects these questions and the answers given by the students.

Teacher: How many points did you find while forming this line?
Beyza: Five points.
Teacher: I wonder how many points would be enough to form the line? Why is that?
Ceyda: Three points are enough. It would be enough if we found the beginning, the middle and the end.
Gamze: It is enough if we find two.
Esra: It is enough if we find the first one and the last one.
Teacher: Okay, let me ask you something. Does it only have to be the first and the last one? Can't two random points be given?
Beyza: It would be enough.

This dialog gave the teacher a good opportunity to help the students construct a rationale for the idea that a line can be precisely determined by two points on it.

Regarding the use of different representations, students initially struggled at some points, but the frequent emphasis on different representations throughout the application, the adequate time given to students to perform the targeted actions, and the correct guidance helped them overcome their initial difficulties.

3.4. Using Symbols Meaningfully

The using symbols meaningfully component includes indicators such as expressing the generalizations reached by the students correctly algebraically using appropriate symbols, solving equations and systems of equations. All lesson plans included examples or activities to support meaningful use of symbols.

The analysis of the using symbols meaningfully component revealed that students generally had difficulty in performing the actions related to this component. In an example in the transition/development part of the lesson in the Systems of Linear Equations-3, it was stated that Yusuf, who collected only 5 and 10 lira banknotes in his piggy bank, had a total of 30 banknotes and 210 liras, and the number of 5 and 10 lira banknotes in the piggy bank was asked. Students had great difficulty in forming the appropriate equation for this problem. Below is the dialog between the teacher and his student Salih about this problem.

Teacher: If there are x number of 5 TL, how many TL is the total?
Salih : ....?
Teacher: If there are 3 5 TL, how many TL is the total?
Salih: 15 TL
Teacher: What did you do to find it?
Salih: I hit it.
Teacher: You will think the same way. He says there are x.
Salih: It will be 5x.
Teacher: In the same way, if you think about 10 TL banknotes.
Salih: 10y. The total amount will be 5x+10y=210.

The teacher supported the student to make correct inferences by sampling a situation that was familiar to the student. At this stage, some students tried to provide a solution to the problem by reducing the number of unknowns (such as taking 30-x instead of y). Figure 5 shows a section from the notebooks of the students who presented solutions in this way.

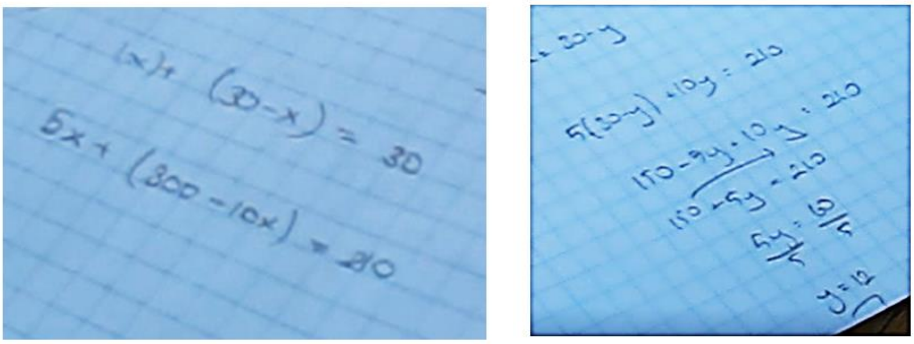


Figure 5. Sample solutions from student notebooks

Some students tried to solve the problem using the elimination method. In the case of another problem in the same lesson, students were able to find the solution easily when they added the equations in the system of equations they obtained side by side without any intervention. In this problem, one of the equations (5x+10y=210 or x+y=30) must be multiplied by a negative number in order to apply the elimination method. The dialog starting with Beyza's question regarding this situation is below.

Beyza : In our equation in the previous problem, we had x+y=175 and x-y=105. When they were added side by side, 2x remained and y disappeared as an unknown. The disappearance was because their sum was 0. But when I add or subtract the equations of this problem, none of them disappear.
Teacher : If your equations are not ready for one of the unknowns to disappear, how do you proceed to make them ready?
Esra : I multiply by minus.
Teacher : If you just multiply one of the equations by minus and add, you will get new equations with two variables (demonstrated on the board).
Esra : I multiply y by -10 in the equation x+y=30.
Teacher : If you only change y, won't this affect the equality of the equation?
Gamze : I think we multiply the whole equation x+y=30 by -5.
Teacher : It can be possible. When deciding what to multiply by, you think about which unknown you want to eliminate. In which case does the x in the equation x+y=30 disappear when added with the x in the equation 5x+10y=210? Or in which case does y in the equation x+y=30 disappear when added to y in the equation 5x+10y=210?
Ahmet : Can we divide the second equation by -5 instead of expanding the first equation?

Here, the teacher made an instructional explanation with a direct procedural emphasis, stating that any arrangement that would make the coefficient of one of the unknowns in two equations the opposite sign of each other would be appropriate. Figure 6 shows some of the student answers that reach the solution by the method of elimination by forming the equations in the system correctly.

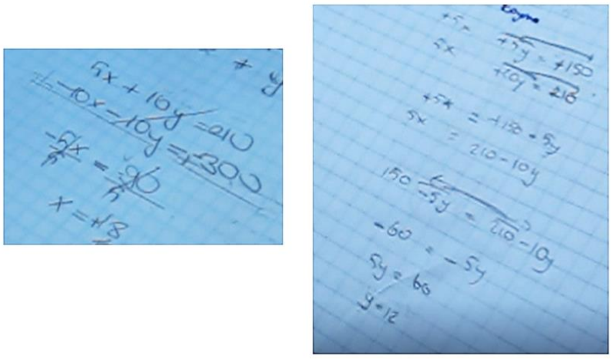


Figure 6. Student answers reaching the solution with the elimination method

When the application is considered as a whole, students often refer to rote procedures rather than logical inferences in their decision-making processes when using symbols. Here, rote procedures seem to be the mechanism that is effective in deciding the interventions they will make in the process of solving the system of equations. They had difficulty in making sense of the problems, translating data into algebraic expressions and developing solution strategies.

3.5. Critical Thinking and Working with Functions

The critical thinking component was inherently included in all lesson plans and practices. Although the indicators related to the component of working with functions are directly related to the first two lesson plans, they are also used in graphical solutions of linear equation systems.

In the Linear Relations and Real Life-2, students were given a problem situation in which a newly married couple wanted to have wedding invitations made, received prices from different printing houses and had to determine which of the two available options was more profitable. In the solution process of this problem, the teacher utilized table and graphic representations to support students in forming functional relationships corresponding to both situations and comparing these options. During the solution process of the problem, different students gave different answers. The following is one of the dialogues between the teacher and the class.

> Teacher: How much do you pay for 150 invitations at Değer Printing House?
> Engin : Double 150. We pay 300 liras from 2.
> Teacher: If you buy from Saygı Printing, how much do you pay for 150 invitations?
> Salih : We will give 200 at the beginning. If I pay 150 liras for 150 invitations, we will pay 350 liras in total.
> Teacher: If they have 150 invitations made, which invitation agency would be more profitable for this couple?
> Okan : It will be more profitable if they have them made by Değer Printing House. They will keep 50 liras in their pockets.
> Teacher: How much are your payment amounts in Değer Printing House and Saygı Printing for 250 invitations?
> Esra : 250 for Değer printing house. 2 to 500 liras.
> Beyza : For 250 invitations at Saygı Printing, it is 450 liras from 200+250.
> Teacher: Which one is more profitable to prefer?
> Doğan : Here, too, it is more profitable to choose Saygı Printing.
> Teacher: Is there a profitable option in every case?
> Salih : There is no such option.
> Teacher: Why is this so? Will there be a situation where the same amount of money is paid for the same number of invitations in both options?
> Esra : There will be.
> Teacher: If there is such a situation, how will it happen? Can you compare before and after this situation?

In the dialog above, the teacher encourages the students to compare the offers of both printing houses for different values, pointing out a critical point (the number of invitations to be paid equally for both printing houses) so that they can make the right inference. In the context of this problem, although table representation (See Figure 7) were created together with the students to support students to express the relevant functional relationships symbolically, students had great difficulty in answering the question "how much will be paid for x invitations in both options".

Davetiye Sayısı (x)	Ödenecek Para Miktarı (y)	İlişki
0	200	200
1	201	200+1.1
2	202	200+1.2
3	203	200+1.3
...	...	...
25	225	200+1.25
50	250	200+1.50
100	300	200+1.100
...	...	...

Figure 7. Table showing the fee to be paid to the Saygı printing house

To make a general assessment of these components; students can make comparisons about the current situation with appropriate questions and support, and need support in making interpretations and inferences. Although tables and graphical representations support students in forming functional relationships, students have difficulty in expressing and using the functional relationship in symbolic form.

4. Discussion, Conclusion and Recommendations

The focus of this study is to present reflections from an environment developed to support students' algebraic reasoning. Accordingly, an action plan was developed and implemented in a real classroom setting. The main conclusion of the study is that the learning environment supports students' algebraic reasoning skills in general.

Making sense of algebraic ideas, thoughts and approaches has been one of the components considered throughout all applications. The act of making sense is important both as a starting point and as a continuous support for an ongoing process. Students' ideas about algebra stem from their past experiences in arithmetic (Kieran, 1992; Herscovics & Linchevski, 1994; Sfard, 1995). As an expected consequence of this situation, the findings of this study reveal that students have difficulty in making sense of algebraic ideas. The analyses revealed that students had difficulty in establishing effective communication that would facilitate making sense of algebraic ideas during in-class applications. It was determined that students' tendency not to engage in question-answer interactions with the teacher and/or other students to support their making sense processes negatively affected their performance in both this component and other components of algebraic reasoning. On the contrary, Yayla, Memduhoğlu, and Saylık (2017) stated that academic achievement increases in classrooms where students ask more questions and receive answers to these questions

Reaching generalizations and formulating and verifying them are among the most important functions of mathematics. On the other hand, research has shown that students have difficulty in generalization processes. In this study, formulating generalizations was a skill emphasized in terms of algebraic reasoning. Analyzing the relationships between the variables subject to the generalization through different representations (especially tabular and verbal) facilitated the process of formulating the generalization. In this process, students were supported in putting forward ideas and presenting evidence to support or refute them.

Algebraic reasoning requires the meaningful use of different representations such as mathematical symbols, tables, graphs and equations (Herbert & Brown, 1997). However, studies show that students have difficulties in using these representations effectively, cannot associate symbols with a mental idea, and have trouble adapting generalizations to similar situations (Capraro & Joffrion, 2006). Throughout the interventions, different representations were frequently emphasized and students were engaged in situations requiring transitions between representations. The positive reflections of this situation were noticed more clearly in the later stages of the implementation. This reaffirms the importance of the learning environment and the teacher's providing students with such opportunities.

The study reveals that students have the most difficulty in the actions related to the component of using symbols meaningfully. The study shows that students have difficulty in associating symbols with a mental meaning, as well as in using them to formulate equations, generalizations or functional relationships. Capraro and Joffrion (2006) noted that even in the seventh and eighth grades, many students are not adequately prepared for the transition to algebraic expressions and relationships. In a way, they drew attention to the inherent difficulty in using symbols and thinking in terms of symbols. When students' lack of previous experience in using symbols in a meaningful way is added to this, which was clearly observed in this study, the application process becomes more difficult. This shows that this problem cannot be overcome by interventions at a certain grade level, no matter how well planned, and that students should be consciously supported in terms of algebraic thinking from preschool onwards.

Critical thinking skills play a fundamental role in the development of algebraic reasoning. Research shows that critical thinking supports students to question, analyze and generalize mathematical concepts (Baykul, 2009). However, the results of the study show that students need more encouragement and guidance in this process. Raising students in a structure that questions and criticizes throughout their entire education life will also support algebraic reasoning processes.

Teachers cannot develop students' algebraic thinking and reasoning skills by simply engaging them in stereotypical tasks. Instead, as exemplified in this study, they should design and implement learning environments that are connected to real life, have clear objectives (here algebraic reasoning components/indicators provided this), and focus on the student.

Acknowledgements: This study is based on the master's thesis of the first author under the supervision of the second author.

Funding: No funding was reported for this study.

Declaration of interest: The author declares no conflict of interest.

Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Akıl Yürütmelerini Destekleyen Bir Öğrenme Ortamından Yansımalar

1. Giriş

Cebirsel düşünme, en genel anlamda, cebirsel kavramları (değişken, eşitlik, denklem, eşitsizlik, fonksiyon vb.) ve matematiksel süreçleri (genelleme, temsil etme, akıl yürütme ve destekleme) anlamlandırma ve uygun bir şekilde kullanma becerisi olarak tanımlanabilir (Çelik, 2007; Blanton vd., 2017). Bu düşünme becerisi, yalnızca çeşitli problemlerin çözümünde güçlü bir araç değil aynı zamanda matematiği kalbi sayılan genellemelere ulaşma ve formüle etme açısından özel öneme sahiptir. Cebirsel akıl yürütme ise, bu düşünme biçiminin özel bir yönü olarak, öğrencilerin cebirsel ifadeler ve ilişkiler üzerinde farklı temsiller aracılığıyla sistematik ve mantıksal çıkarımlar yapma becerisi olarak ifade edilebilir. Bir başka ifade ile cebirsel düşünme daha geniş bir kavramsal çerçeveyi ifade ederken, cebirsel akıl yürütme bu çerçevenin mantıksal bir yolla uygulamasıdır.

Son yıllarda yurt içi ve yurt dışında uygulamaya konan matematik eğitimi reformlarında, cebirsel düşünme ve akıl yürütme, geliştirilmesi hedeflenen temel beceriler arasında yer almaktadır. TIMSS gibi geniş katılımlı uluslararası nitelikte değerlendirme sınavlarında Türkiye özelinde olduğu kadar birçok ülke içinde cebir öğrencilerin zayıf performans gösterdiği alanlardan biridir (Milli Eğitimi Bakanlığı [MEB], 2020). Bu durum cebirsel düşünme becerilerini geliştirme odaklı reform faaliyetlerinin önemini ortaya koymaktadır. Türkiye'de Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2018; 2024), öğrencilerin matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirmeyi, matematiksel ilişkilendirme ve genelleme yapabilmelerini öncelikli bir hedef olarak belirlemiştir. Benzer şekilde, cebirsel düşünmenin erken yaşlardan itibaren matematiksel eğitimin temel bir unsuru olması gerektiğini (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2020; Ontario Ministry of Education [OME], 2013) çeşitli program kaynaklarında da yer bulmaktadır. Ancak, öğretim programlarında belirtilen bu hedeflerin, sınıf içi uygulamalarda etkin bir şekilde hayata geçirilmesi, öğretmenlerin pedagojik yaklaşımlarında yenilikçi ve öğrenci merkezli yöntemler benimsemelerini gerektirmektedir.

Bu çalışma, bir devlet okulunda ortaokul matematik öğretmeni olarak görev yapmakta olan ilk yazarın kendi sınıf içi uygulamalarında genel anlamda cebirsel düşünme daha spesifik olarak cebirsel akıl yürütme becerilerini desteklemek için daha etkili uygulamalara ihtiyaç duyduğunu fark etmesiyle şekillenmiştir. Bu bağlamda, eylem araştırması yöntemiyle, öğrenme ortamında yapılan müdahalenin yansımalarını değerlendirmek ve sınıf içi uygulamaları geliştirmeye dönük öneriler sunmak hedeflenmiştir. Çalışma, cebirsel düşünme ve akıl yürütme becerilerini geliştirmeyi amaçlayan sınıf içi uygulamalar üzerine odaklanarak bu süreçte elde edilen deneyim ve bulguları paylaşmayı amaçlamaktadır.

1.1. Cebirsel Akıl Yürütme

Akıl yürütme genel anlamda; mevcut bir duruma ilişkin tüm bileşenleri dikkate alarak bir sonuca ulaşma süreci olarak tanımlanabilir (Umay, 2003; Umay & Kaf, 2005). Daha spesifik olarak matematiksel akıl yürütme sayılar, ifadeler, nicelikler ve şekiller arasındaki ilişkiyi belirleyerek, bilginin farklı öğelerini, ilgili temsilleri ve süreçlerini ilişkilendirerek bilgi ve kanıt temelinde geçerli çıkarımlarda bulunma olarak tanımlanabilir (MEB, 2005; MEB 2013). Bu bağlamda matematiksel akıl yürütme, fikirler ve bunların ilişkileri hakkında sonuçlar çıkarılıp genellemelerin yapılmasını içeren matematiksel düşünmenin bir parçası (O'Daffer & Thornquist, 1993) ve en önemli bileşenlerinden biridir.

Umay'a (2003) göre matematiksel akıl yürütme belli bir içerik alanı özelliğinde cebirsel, orantısal, geometrik ve istatistiksel olarak adlandırılabilir. En genel anlamda cebirsel akıl yürütme matematiksel ifadeler ve semboller üzerinde mantıksal çıkarımlar yapma, ilişkileri anlama ve bu ilişkiler üzerinden genellemelere ulaştıracak sonuçlara varma becerilerini ifade etmektedir. Cebirsel akıl yürütme, Herbert ve Brown (1997) tarafından matematiksel bilgiyi sözcükler, şemalar, tablolar, grafikler ve sembollerle ifade etme; bu bilgilerle hipotezler oluşturma ve test etme; ilişkileri tespit ederek analiz etme ve değerlendirme olarak tanımlanmıştır. Kaput (1999) cebirsel akıl yürütmeyi matematiksel işlemler ve ilişkiler temel alınarak genellemeler yapma ve hipotezler oluşturma becerisi olarak ifade etmiştir. Ellis (2011) ise cebirsel akıl yürütme ise genellemeler yapma, bu genellemeleri matematiksel olarak ifade etme ve yeni durumlara uygulama süreci olarak tanımlanmaktadır Bu tanımlardan hareketle, cebirsel akıl yürütmenin matematiksel bilgiyi anlamlandırma, yorumlama, analiz etme ve genelleme yapmayı içeren soyut bir süreç olduğu söylenebilir.

Kaput'da (1999) cebirsel akıl yürütmenin beş farklı biçiminden bahsetmektedir. Bunlar; (i) örüntülerden genelleme, (ii) sembollerin anlamlı kullanımı, (iii) sayı sistemindeki yapıların çalışılması, (iv) fonksiyonlarla çalışılması ve (v) bu dört maddeyi birleştirecek matematiksel modelleme süreci olarak ifade edilebilir. Bu sınıflandırma referans alınarak yapılan literatür taraması sonucunda cebirsel akıl yürütmenin temel bileşenleri aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Örüntüleri Tanıma ve Genelleme: Örüntü tanıma, cebirsel akıl yürütmenin başlangıç noktasıdır. Öğrenciler sayılar, şekiller veya değişkenler arasındaki ilişkiyi analiz ederek genel ifadeler oluştururlar. Kaput (2008) bu beceriyi cebir öğreniminin temel taşı olarak nitelendirmiştir.

Harfli sembollerin farklılaşan rolleri ve kullanımını anlamlandırma: Cebirsel akıl yürütmenin merkezinde, harfli sembolleri ve değişen rollerinin (bilinmeyen, değişken, parametre, sabit vb.) anlamını kavrayabilmek yer alır. Harfli semboller matematiksel bir ifade veya ilişkide birden fazla role sahip olabilir ve bu durum temsiliyet, genelleme yapma ve problem çözme süreçlerinde önemlidir. Knuth vd. (2005), harfli sembollerin kavranışının, öğrencilerin matematiksel sembollerle akıl yürütebilme düzeyini doğrudan etkilediğini belirtmiştir.

Çoklu temsilleri anlamlandırma ve kullanma: Matematiksel ifadeleri farklı biçimlerde ifade etme ve bu temsiller arasında geçiş yapabilme becerisi, cebirsel düşüncenin önemli bir göstergesidir. Bağdat ve Anapa-Saban (2014), öğrencilerin cebirsel ifadeleri tablo, grafik veya sözlü anlatım gibi farklı biçimlerde yorumlayabilme becerilerinin, onların matematiksel anlayışını güçlendirdiğini ortaya koymuştur. Cebirsel akıl yürütme öğrencilerin sembollerin sahip oldukları anlamları anlamlandırarak çoklu temsiller (tablo, grafik vb.) arasında mantıksal geçiş yapmayı içerir (Bağdat & Anapa-Saban, 2014).

Problem çözme ve fonksiyonlarla çalışma: Cebirsel akıl yürütme problemlerin yapısını analiz ederek çözüm üretme noktasında kilit role sahiptir. Burada öğrenci problem bağlamına uygun sembolik ifade veya ilişkileri kullanarak probleme çözüm üretir. Öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri tanımlaması, bu ilişkileri kullanarak mevcut durumu analiz etme ve çözüm sunmaları cebirsel akıl yürütmenin temel göstergelerinden biridir (Kaput, 1999; Van De Walle, Karp & Bay-Williams, 2013).

Eleştirilen düşünme ve hata ayıklama: Öğrencilerin cebirsel genellemeler yapabilmesi ve bu genellemeleri doğrulamak için mantıksal bir çerçeve kullanabilmesi de cebirsel akıl yürütmenin bir göstergesidir. Ancak genellemelerin doğruluğu ve geçerliliği, eleştirel bir bakış açısıyla incelendiğinde güvence altına alınabilir. Öğrenciler, yaptıkları genellemeleri eleştirel bir şekilde değerlendirerek hatalı varsayımlardan kaçınabilir (Ellis, 2011). Matematikte eleştirel düşünmenin öğrencilerin hataları fark etme ve alternatif çözüm yollarını sunma becerilerini desteklediği (Dede & Argün, 2003; Stacey, 2006; Mason, Burton & Stacey, 2010) ve bu düşünmenin cebirsel akıl yürütmede temel bir araç olması bu düzenlemenin temel gerekçesi olmuştur.

Sonuç itibari ile cebirsel akıl yürütme, öğrencilerin matematiksel soyutlamaları anlamaları, sembollerle düşünme becerilerini geliştirmeleri ve bu becerileri problem çözme sürecinde etkin bir şekilde kullanmalarını içerir. Bu göstergelerin öğrencilerde geliştirilmesi, onların matematiksel düşünme becerilerini ileri düzeylere taşımada kritik öneme sahiptir. Burada ortaya konan bileşenler cebirsel akıl yürütmeyi destekleyen bir öğrenme ortamında başvurulması gereken eylemleri tespit etmek açısından önemli ve gereklidir.

1.2. Araştırmanın Gerekçe ve Önemi

Cebirsel akıl yürütme yalnızca matematik eğitiminde değil, fizik, kimya gibi olgusal bilimlerde, mühendislik ve ekonomi gibi alanlarda da kritik bir öneme sahiptir. Çünkü bu beceri, bireylerin karmaşık sistemleri analiz etmelerine, soyutlama yaparak farklı bağlamlarda genellenebilir çözümler üretmelerine olanak tanır (Kaput, 2008).

Uluslararası literatürde cebir öğrenimi, cebirsel düşünme ve akıl yürütme üzerine yapılan çalışmalar arasında cebirsel sembollerin anlaşılması (Capraro & Joffrion, 2006; Knuth vd., 2005), cebirsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi (Ellis, 2011) ve öğretmenlerin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen sınıflar oluşturma yolları (Blanton & Kaput, 2005) öne çıkmaktadır. Örneğin, Ellis (2011) çalışmasında, fonksiyonların ve fonksiyonel ilişkilerin anlaşılmasının cebirsel akıl yürütmenin kritik bir adımı olduğunu belirtmiştir. Blanton ve Kaput (2005) ise bir yıl süren çalışmaları boyunca derslere cebirsel akıl yürütme etkinliklerini entegre ederek öğrencilerin bu becerilerinde belirgin bir ilerleme sağlandığını gözlemlemiştir.

Türkiye'de yapılan çalışmalar arasında cebirsel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi (Bike-Kalkan, 2014; Kaya & Keşan, 2017), farklı cebir öğretim yaklaşımlarının etkilerinin değerlendirilmesi (Kanbir, 2016) ve cebirsel kavram yanılgılarının giderilmesi (Erdem & Sarpkaya-Aktaş, 2018) dikkat çekmektedir. Kaya ve Keşan (2017), cebirin sadece matematik dersleriyle sınırlı olmayan, yaşamın her alanına yayılan bir zihinsel aktivite olmasına rağmen, öğrencilerin cebirsel akıl yürütmede yetersiz olduklarını vurgulamışlardır. Öz (2017) ise öğrencilerin cebir öğrenme süreçlerinde genellikle algoritmalara dayalı bir yaklaşımı benimsediklerini ve öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerini desteklemede sınırlı fırsatlar sunduklarını tespit etmiştir.

Bu veriler ışığında, spesifik olarak öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini desteklemek için öğretim süreçlerinin ve öğrenme ortamlarının yeniden yapılandırılması gerekmektedir. Öğretmenlerin, öğrencilerin anlamalarını ve matematiksel düşünme becerilerini geliştirecek bir yaklaşım benimsemeleri önemlidir (Leitze & Kitt, 2000). Ancak literatürde, durum tespiti niteliğindeki çalışmaların ağırlıkta olduğu, cebirsel akıl yürütmeyi konu alan uygulamalar ve bu uygulamaların sınıf ortamındaki yansımalarını inceleyen çalışmalara hala önemli bir ihtiyaç olduğu anlaşılmaktadır. Bu çalışma, literatürdeki bu ihtiyaca dönük olarak "Sekizinci sınıf öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini desteklemeyi hedefleyen bir öğrenme ortamı tasarlamak ve bu ortamdan yansımalar sunmak amaçlanmaktadır. Bu tür bir araştırma kuramsal özellikle de pratik açıdan matematik eğitimi alanına önemli katkılar sunabilir. Bir yandan, cebirsel akıl yürütmenin gelişimini destekleyen etkili öğrenme ortamlarının tasarımına yönelik literatüre katkıda bulunabilir. Diğer yandan, öğretmenler için yenilikçi öğretim stratejilerinin geliştirilmesine ve uygulanmasına rehberlik edebilir.

2. Yöntem

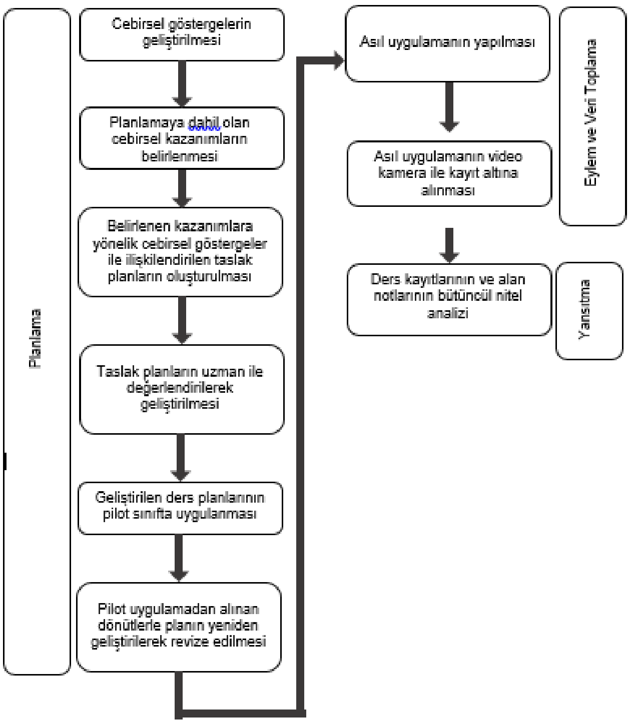
Bu çalışmada, öğrencilerin cebirsel akıl yürütmelerini destekleyen bir sınıf içi ortamdan yansımalar sunmayı amaçlanmaktadır. Araştırma bu öğrenme ortamının öğrencilerin cebirsel akıl yürütmelerini nasıl desteklediğini gözlemlemek ve değerlendirmek amacıyla eylem araştırması şeklinde yürütülmüştür. Eylem araştırması bir uygulayıcının bizzat kendisinin veya bir araştırmacıyla birlikte gerçekleştirdiği; uygulama süreci içerisinde oluşan sorunların tespit edilmesi veya mevcut bir soruna yönelik çözüm bulunması için sistematik şekilde veri toplamayı ve analiz etmeyi içerir (Karasar, 2009). Bu çalışmada ilk yazar kendi öğretme deneyimlerinden hareketle; sınıf içi öğrenme-öğretme faaliyetlerinin, ortaokul matematik dersi öğretim programının hedeflediği temel matematiksel beceriler odağından uzak olduğu ve bunun yalnızca kendi sınıflarında ortaya çıkan bir durum olmadığının tespitini yapmıştır. Sınıf içi uygulamalarda ortaya çıkan bu sorun, ilgili araştırmacıya "düşünme becerilerini (özel olarak akıl yürütme) kendi derslerimin merkezine nasıl çekebilirim" sorusu ile karşı karşıya bırakmış, bir çözüm arama ve bu çözümü değerlendirme yoluna itmiştir. Bu nedenle araştırmada uygulayıcıların ve problemin odağında olanların katılımıyla yapılan uygulamanın değerlendirilerek mevcut durumu iyileştirmek için önlemlerin alındığı eylem araştırması yöntemi benimsenmiştir.

2.1. Katılımcılar

Araştırma Trabzon ilindeki bir ortaokulda 8. sınıfta öğrenim görmekte olan 25 öğrenci (12 kız, 13 erkek) ile yürütülmüştür. Sekizinci sınıf düzeyinde cebir kazanımlarının diğer sınıflara göre görece yoğunluğu bu sınıf seviyesinde uygulama yapılmasının temel gerekçelerinden biri olmuştur. Ayrıca araştırmanın gerçekleştirildiği süreçte, ilk yazarın sorumluluğunda iki sekizinci sınıf, bir yedinci sınıf ve bir altıncı sınıf bulunmaktaydı. Pilot ve asıl uygulamada öğretmen-öğrenciye ilişkin faktörleri asgariye indirmek amacı sekizinci sınıfların seçiminde bir başka etken olmuştur. Pilot çalışma ve asıl çalışmanın gerçekleştirildiği iki sekizinci sınıf hem sınıf ortamının fiziksel özellikleri hem de matematik dersindeki akademik başarı açısından benzer özelliklere sahiptir.

2.2. Araştırma Tasarımı ve Süreci

Eylem araştırması yönteminin kullanıldığı bu çalışmanın eylem planın akış şeması şekil 1'de verilmiştir. Çalışma birbirini takip eden üç aşamada gerçekleştirilmiştir. Bunlar: planlama, eylem ve veri toplama, yansıtma aşamalarıdır.



Şekil 1. Araştırma eylem planının akış şeması

Planlama: Problemin tespitinden sonra çözümüne ilişkin kararların alındığı aşamadır. Öncelikle literatür desteğinde ortaya konan cebirsel akıl yürütme bileşenlerine ait göstergeler ilgili öğretim kademesinin özellikleri de dikkate alınarak belirlenmiştir. Daha sonra bu gmstergelerin entegre edildiği ders planları geliştirilmiş ve pilot uygulaması 24 öğrenciden (12 kız ve 12 erkek) oluşan bir sekizinci sınıfta gerçekleştirilmiştir.

Eylem ve Veri Toplama: Pilot uygulama sonrasında düzenlenen ders planlarına göre asıl grupta uygulamanın gerçekleştirildiği aşamadır. Öğretim programında cebir öğrenme alanına ilişkin üç kazanım için toplam 10 ders saatlik bir uygulama gerçekleştirilmiştir. Uygulamalar birinci yazarın sorumluluğunda gerçekleşmiş ve tüm dersler video ile kayıt altına alınmıştır. Ayrıca araştırmacı video kayıtlarının analizi esnasında kullanmak üzere sınıf içinde ve hemen ders bitiminde alan notları almıştır.

Yansıtma: Eylem araştırması en önemli aşamalarından biridir. Bu aşamada cebirsel akıl yürütmeyi destekleyecek şekilde planlanan dersin bütün olarak etkililiği sistematik bir çerçevede değerlendirilmiştir. Her bir uygulama 'dersin cebirsel akıl yürütme göstergeleri açsından belirlenen hedeflerine öğrencilerin ulaşma durumunu değerlendirme' ve 'dersin amaçlara ulaşmada daha başarılı olabilmesi adına öneriler sunma' olmak üzere iki temel nokta etrafında yansımalar yapılmıştır.

2.2.1.Cebirsel Akıl Yürütme Göstergelerin Oluşturulması

Araştırmanın temel amacı doğrultusunda öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini gözlemleyip değerlendirilebilmek için cebirsel akıl yürütme göstergeleri literatür desteğinde oluşturulmuştur. Bunun için aşağıdaki üç adım takip edilmiştir.

Birinci Adım: Bu adımda öncelikle cebirsel düşünme ve cebirsel akıl yürütme özelinde literatür taraması yapılmıştır. Temelde cebirsel düşünme becerisinin mantıksal bir çerçevede işlevsel bir uzantısı olarak anlamlandırılan cebirsel akıl yürütmeye ilişkin tanımlar incelenmiş ve ardından 1.1. Cebirsel Akıl Yürütme başlığı altında sunulan cebirsel akıl yürütmenin bileşenlerine ulaşılmıştır.

İkinci Adım: Bu adımda ilk olarak bir önceki adımda belirlenen cebirsel akıl yürütmeyi bileşenlerine ait anahtar kavram ve/veya süreçler (eşitlik kavramının anlamını, yapısını ve kullanımını anlar, fonksiyonel ilişkileri teşhis eder, farklı gösterimleri kullanır, veriler arasında bağlantı kurar, vb.) belirlenmiştir. Ardından ilgili öğretim kademesi de dikkate alınarak taslak göstergeler bu bileşenlerin altında oluşturulmuştur.

Üçüncü Adım: Bu adımda ise alanında uzman bir araştırmacı ile cebirsel akıl yürütme bileşenleri ve bu bileşenleri tanımlayan göstergeler incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda temelde aşağıdaki düzenlemeler yapılmıştır. Göstergelerin bu çalışmadaki son hali Tablo 1'dedir.

Tablo 1. Cebirsel akıl yürütme bileşen ve göstergeleri

Bileşenler	Göstergeler
CA:Cebirsel Fikirleri, Düşünceleri, Yaklaşımları Anlamlandırma	CA1: Anlaşmazlıkları ve yanlış anlamaları ortadan kaldırmaya yönelik sorular sorar.
BK:Bağlantı ve İlişki Kurma	BK1:Veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımda bulunur ve varsayımları gerekçelendirir, kanıtlar veya çürütür. BK2:Veriler arasındaki ilişkileri kullanarak genellemeyi formüle eder ve destekler.
FG:Farklı Gösterimleri Kullanma	FG1:Matematiksel bilgiyi sözel, tablo, grafikle ve cebirsel olarak gösterir FG2: Farklı gösterimler arasında ilişkileri kurar ve bir gösterimden diğer gösterime geçiş yapar.
SK:Sembolleri Anlamlı Kullanma	SK1:Genellemeleri cebirsel olarak ifade eder SK2: Denklem/denklem sistemi kurar ve çözer. SK3: Sembollerin (+, -, :, x, = gibi işlemler ile a,b,x,… gibi harfli semboller) anlamları ve kullanımlarını bilir
ED : Eleştirel Düşünme	ED 1: Farklı bağlamlara ilişkin temsilleri karşılaştırır, yorumlar ve sonuç çıkarır. ED 2: Kendi hatalarını analiz eder
FC: Fonksiyonlarla Çalışma	FC 1: Fonksiyonel ilişkileri oluşturur FC 2: Fonksiyonel ilişkileri kullanarak mevcut durumu analiz eder ve çözüm sunar.

1) Bileşen adları bazı durumlarda daha kapsayıcı nitelikte düzenlenmiştir. Örneğin "Örüntüleri Tanıma ve Genelleme" bileşeni, üzerinde çalışılan bağlamın bir örüntü formatında olmadığı durumları da içermesi açısından "Bağlantı ve İlişki Kurma" şeklinde düzenlenmiştir.

2) Bileşenler altında aynı amaca hizmet ettiği düşünülen bazı göstergeler birleştirilmiştir. Örneğin; "Bağlantı ve İlişki Kurma" başlığı altında "Veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımlarda bulunur varsayımı destekleyen veya çürüten örnekler sunar" ve "Varsayımları doğrular ve kanıtlar" şeklinde iki gösterge birleştirilerek "Veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımda bulunur ve varsayımları gerekçelendirir, kanıtlar veya çürütür" şeklinde düzenlenmiştir.

3) Cebirsel akıl yürütme açısından önemli ancak örtük kalmış bazı durumlar ise ön plana çıkarılmıştır. Örneğin; cebirsel akıl yürütmenin cebirsel ifade/ilişkileri analiz etme, mantıksal çıkarımlar yapma ve problem çözme süreçlerinde sembolleri ve işlemleri etkili bir şekilde kullanma şeklinde işlevin gerçekleştirebilmesi öncelikle söz konusu cebirsel düşünme/fikir/yaklaşımları anlamlandırmasını gerektirir. Bu açıdan "Cebirsel Fikirleri, Düşünceleri, Yaklaşımları Anlamlandırma" şeklinde bir bileşen ve bu bileşenle ilişkili olarak öğrencinin verilen bağlamda anlaşılmayan ya da yanlış anlaşılan durumları ortadan kaldırmaya dönük sorular sorması şeklinde bir gösterge eklenmiştir.

2.2.2. Ders Planlarının Geliştirilmesi

Ders planları sekizinci sınıf matematik dersi öğretim programında cebir öğrenme alanındaki üç kazanım için çeşitli öğretim kaynakları (matematik ders kitapları, Eğitim Bilişim Ağı [EBA] vb.) ile literatürden faydalanılmıştır. Öğrencilerin sistematik bir şekilde cebirsel akıl yürütmeye yönlendirilmesi amacıyla geliştirilen cebirsel göstergeler ders planlarına entegre edilmiştir. Toplam beş ders planı geliştirilmiştir. Tablo 2 öğretim programındaki kazanımlar odağında geliştirilen ders planları, bu ders planlarının ilişkilendirildiği cebirsel akıl yürütme göstergelerini ve uygulama sürelerini göstermektedir.

Tablo 2. Kazanımlar ve ilgili ders planları

Kazanım	Ders Planı	Cebirsel Göstergeler	Süre (dk)
Doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına ait tablo, grafik ve denklemi oluşturur ve yorumlar	Doğrusal İlişkiler ve Günlük Yaşam-1	CA1, BK1, BK2, FG1, FG2, SK1, SK3, ED2, FC1, FC 2	40+40=80 dk
	Doğrusal İlişkiler ve Günlük Yaşam- 2	CA1, BK1, BK2, FG1, FG2, SK1, SK3 ED1, ED2, FC1, FC2	40+40=80 dk
İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerini çözer	Doğrusal Denklem Sistemleri-3	CA1, FG1, FG2, SK2, SK3, ED2	40+40=80 dk
Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ile bu denklemlere karşılık gelen doğruları grafikleri arasında ilişki kurar	Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-4	CA1, FG1, FG2, SK2, SK3, ED1, ED2, FC1, FC2	40+40=80 dk
	Doğrusal Denklem Sistemleri ve Grafikleri-5	CA1, FG1, FG2, SK2, SK3, ED1, ED2, FC1,FC2	40+40=80 dk

Ders planları geliştirme sürecinde ilk olarak kazanımlar ve cebirsel göstergeler birlikte ele alınarak taslak bir ders planları oluşturulmuştur. Daha sonra oluşturulan taslak planlar, lisansüstü düzeyde akıl yürütme becerilerine yönelik ders veren alanında uzman bir matematik eğitimcisinin görüşleri doğrultusunda değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler taslak planların (i) kazanımlara uyumu, (ii) hedeflenen cebirsel göstergeleri destekleme durumu ve (iii) sınıf düzeyine ve öğretim ilkelerine uygunluğu bakımından üç temel kriter doğrultusunda yapılmıştır. Her bir ders planı için ilgili uzmanla yaklaşık 30 dakikalık görüşmeler yapılmış, bu görüşmeler ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmıştır. Görüşme kayıtlarının iki araştırmacı tarafından incelenmesi sonucunda ders planlarında gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Son olarak gözden geçirilip düzenlenen ders planlarının 24 kişilik bir sekizinci sınıfta pilot uygulaması yapılmış ve asıl uygulama öncesi son şeklini almıştır.

2.3.Veri Toplama Araçları

Eylem araştırmalarında veri toplama yöntemleri araştırma sorularına, araştırma durumuna ve araştırmacının yeterliliklerine göre değişiklik gösterebilir (Kuzu, 2009). Ayrıca eylem araştırmalarında birbirini destekleyen çeşitli veriler elde etmek amacıyla birden fazla veri toplama yöntemi kullanılabileceği belirtilmektedir. Bu çalışmada veri toplama araçları olarak sınıf içi uygulamalara ait video kayıtları ve alan notları kullanılmıştır.

Video Kayıtları: Eylem araştırmalarında geçerli ve çeşitli görüş açısı sağlaması bakımından günlükler, alan notları, video kayıtları kullanılabilir. Özellikle video kayıtlar araştırma sürecinin tekrar tekrar izlenmesine ve daha iyi analiz edilmesine olanak sağlayarak araştırmacıların öğrenme ortamına dair doğru yansımalar yapmasına imkân sunar (Sherin, Linsenmeier & van Es, 2009). Asıl uygulama esnasında genel sınıf ortamını çeken bir kamera ile öğrencilerin defterlerinde yaptıklarını ve öğretmenle diyaloglarını kaydeden bir el kamerası kullanmıştır. Ders akışını genel olarak kaydeden kamera ile asıl uygulama esnasında yaklaşık 80x5=400 dakikalık kayıt yapılmıştır. El kamerası ile birlikte toplamda 500 dakikanın üzerinde video kaydı yapılmıştır.

Alan Notları: Nitel araştırma yöntemlerinde zengin betimleme ve detaylandırma yapabilmek amacıyla alan notları sıklıkla kullanılan veri toplama araçlarındandır. Bu çalışmada da asıl uygulamada ders içi ve hemen ders sonrasında alınan alan notları hem dersin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleme durumuna kanıt sunmak hem de video kayıtları analiz edilirken odak noktaları belirleme noktasında yol gösterici olmuştur.

2.4.Verilerin Analizi

Video ile kayıt altına alınan dersler ve araştırmacının tuttuğu alan notları bütüncül bir şekilde nitel olarak analiz edilmiştir. Bu analiz sürecinden temel referans cebirsel akıl yürütme bileşen/göstergeleri olmuştur. Araştırmacılar analiz sürecinde şu iki duruma kanıt aramıştır: (i) öğrenme ortamının hedeflediği cebirsel akıl yürütme göstergeleri açısından öğrencileri destekleme/engelleme durumu nedir? (ii) öğrenme ortamının hedeflerine ulaşması açısından nasıl daha etkili hale getirilebilir?. Sınıf içi diyaloglardan kesitler ve alan notları bu kanıtları betimlemek için kullanılmıştır.

2.5. Araştırmanın Etik İzinleri

Tüm katılımcılar çalışmaya katılmadan önce bilgilendirilmiş onam vermiştir. Katılımcılar, çalışmanın amacı ve herhangi bir sonuç olmaksızın istedikleri zaman geri çekilme hakları konusunda bilgilendirilmiştir. Veriler 2020'den önce toplandığı için ek bir etik onaya gerek duyulmamıştır.

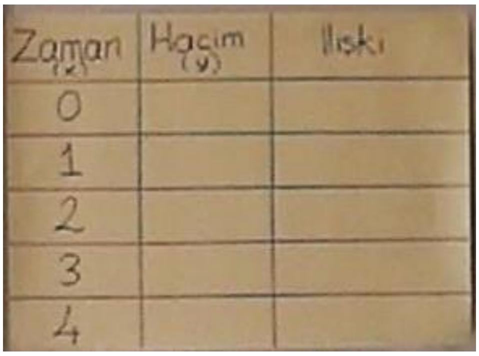
3. Bulgular

Geliştirilen öğrenme ortamına ait sınıf içi uygulamalardan elde edilen bulgular cebir akıl yürütme bileşenleri dikkate alınarak sunulmuştur.

3.1. Cebirsel Fikirleri, Düşünceleri ve Yaklaşımları Anlamlandırma

Cebirsel düşünce, fikir ve yaklaşımların anlamlandırılması özünde öğrencinin zihninde gerçekleşen bir eylem olup bu süreçte öğrencilerin anlaşılmayan ya da yanlış anlaşılan durumları ortadan kaldırmak için sorular sorması beklenir. Anlamlandırma sürecine katkıda bulunacak bir başka yol ise öğretmenin anahtar nitelikte sorularla öğrencilerin ne olup bittiğine ilişkin sorgulama yapmalarını desteklemektir. Bu bakış açısı tüm ders planlarına yansıtılmış ve öğrencilerin hem kendi fikirlerini/çözümlerini hem de arkadaşlarının fikir/çözümlerini ifade etme ve irdeleyebilmelerini sağlayacak nitelikte ortam oluşturma çabasına girilmiştir. Bu ortamda sıklıkla öğrencilere "neden, ne amaçla" soru köklerini barındıra sorular yönlendirilmiştir.

Doğrusal İlişkiler ve Günlük Yaşam-1 ders planına göre işlenişin yapıldığı dersin gelişme bölümünde öğrencilerden bir kaba akıtılan suyun hacminin zamana göre değişimini formüle etmeleri istenmektedir. Kabın içinde başlangıçta 100 ml su vardır ve kaba her saniyede 50 ml su akmaktadır. Öğrencilerin dikkatini probleme çekmek ve problem durumunu anlamalarına yardımcı olmak için sınıftan bir öğrenciye problem durumu sesli bir şekilde okutulmuş ve bağlama ilişkin çok kısa bir animasyon izletilmiştir. Öğrencilerin kaptaki suyun hacminin zamana göre nasıl değiştiğini anlamalarına yardımcı olması için Şekil 2'de verilen tabloyu doldurmaları istenmiştir.



Şekil 2. Tahtaya asılan zaman- hacim tablosu

Öğrencilerin bağlama ilişkin tablo temsilini anlamlandırma durumlarını görmek için öğretmen ve sınıf arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

Öğretmen: Tablodaki sıfırıncı saniye neyi ifade ediyor burada?
Ceyda: Başlangıç.

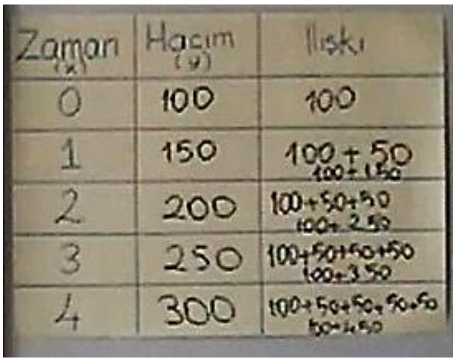
Öğretmen: Başlangıçta ne kadar su vardı?
Ceyda:100 ml.
Öğretmen: Birinci saniyede ne kadar su oldu?
Fatih:150 ml.
Öğretmen: Ne kadar su geliyor bir saniyede?
Fatih:50 ml.

Öğrenciler ellerindeki tabloyu doldururken öğretmen bazı öğrencilerin hacim yerine suyun yüksekliğine odaklandıklarını fark etmiştir. Bunun üzerine öğrencileri yükseklik ile hacim arasındaki ilişkiyi kurmaya yönlendirilmiştir.

Öğretmen: Zaman ile kaptaki suyun yüksekliği arasında ilişki var mı?
Öğrenciler: Evet.
Öğretmen: Nasıl bir ilişki vardır?
Esra: Hacim artarsa yükseklikte artar.
Öğretmen: Yani zaman artıkça hem hacim hem de suyun yüksekliği mi artıyor?
Öğrenciler: Evet.
Öğretmen: Zaman ile hacim arasındaki ilişkiye dikkat edersek ne diyebiliriz? Yani ilişkiyi başlangıçta bulunan su miktarına bağlı düşünebilir miyim?
Gamze: Birinci saniyede 100 artı 50' dir.
Öğretmen: İkinci saniye sonunda ne kadar su birikir?
Selin: 150 artı 50 .
Öğretmen: Öyle de diyebilirsin ama mantığı birinci saniyedeki ne benzerse nasıl olur? Ya da başlangıçtaki su miktarı sabit kalacak şekilde düşünürsen ne dersin?
Selin: O zaman 100 artı 100 olur.
Öğretmen: Her saniye de geleni ayrı ayrı eklesek olur mu?
Selin: Tamam. 100 artı 50 artı 50 olur.
Öğretmen: Üçüncü saniyede nasıl olur?
Fatih: 100 artı 50 artı 50 artı 50 olur.
Öğretmen: Dördüncü saniyede nasıl olur?
Ferhat: 100 atı 50 artı 50 artı 50 artı 50 olur.
Öğretmen: (100+50+50) 'yi göstererek burada daha farklı nasıl ifade edersiniz?
Ceyda: 100+ 2.50 olarak.

Bu diyaloğun başında öğretmen, öğrencilerden yükseklikteki değişimi suyun hacmindeki değişim ile ilişkilendirmeleri amaçlamıştır. Ancak bu diyalog yükseklik ile suyun hacmi arasındaki ilişkiyi, tüm sınıfın ya da problemde hacim yerine yüksekliğe odaklanan öğrencilerin, anlamalarına katkı açısından zayıf kalmıştır. Diğer taraftan her saniyede kaba eklenen 50 ml su vurgusu, öğrencilerin değişkenlerden birinin diğerine göre nasıl değiştiğinin anlaşılmasına katkı sağlamıştır. Bu duruma kanıt olarak öğrencilerin tahtaya gelerek doldurdukları Şekil 3'teki tablo ve aşağıdaki diyalog sunulabilir.

Öğretmen: Zaman sütunu ile ilişki sütunu arasında nasıl bir ilişki vardır?
Esra: Artış miktarı ile zamanı çarptığımda 100'e eklenen şeyi buluyoruz.
Beyza: Hacimleri parçaladığımızda kaç tane 50 varsa o kadar saniye geçmiş oluyor.
Öğretmen: O halde şöyle ifade edebilir miyiz? Başlangıçta kapta olan su miktarı 100 ml'yi sabit alıyoruz ve kaç saniye geçerse o kadar 50'yi üzerine ekliyoruz.



Şekil 3. Tahtadaki tablonun öğrenciler tarafından doldurulmuş hali

Cebirsel düşünce, fikir ve yaklaşımların anlamlandırma sürecine yönelik olarak; öğretmen genel anlamda problemleri sesli okutarak problemde ne verildiğini ne istendiğini öğrencilerin anlamalarına yardımcı olma, öğrencileri soru sormaya teşvik etme ve yönlendirici sorularla onları ilişkinin niteliği hakkında düşünmeye sevk etme gibi fırsatlar sunmuştur. Ancak öğrencilerin bu bileşenle ilişkili göstergenin temel geliştirici unsurlarından olan iletişim kurma hususunda yetersiz kaldıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca yapılan ders analizleri öğretmenin sınıf tartışmalarını toparlama noktasında öğrencilere daha fazla alan bırakması gerektiğini ortaya koymaktadır.

3.2. Bağlantı ve İlişki Kurma

Doğrusal İlişkiler ve Günlük Yaşam-1 ve Doğrusal İlişkiler ve Günlük Yaşam-2 dersleri veriler arasındaki ilişkilere dair varsayımlar oluşturma, varsayımları test etme ve ulaşılan genellemeleri formüle odağındadır. Öğrencilerin sayısal veriler, bunlar arasındaki ilişkiler ve buradan hareketle fonksiyonel ilişkileri formüle etmeye dönük çıkarımlar yapmalarını gerektiren bu uygulamalar cebirsel akıl yürütmeyi destekleme açısından oldukça önemlidir.

Her iki ders planında da işleyiş genel olarak; öğrencilere verilen problemlerde bağlama konu olan değişkenleri içeren tablo oluşturma (bir başka deyişle sayısal veriler elde etme), tabloda değişkenlerin birbirine göre değişimini gözlemleme, değişiminin niteliğini ortaya koyan çıkarımlarda bulunma, bu çıkarımları doğrulama/yanlışlamaya dönük sınıf tartışması yürütme ve son adımda veriler arasındaki ilişkiyi formüle etme şeklinde planlanmıştır. Ders esnasında gerçekleşen ve aşağıda bir örneği verilen öğretmen-öğrenci diyaloglarında, öğretmen bağlantı ve ilişki kurma bileşenine yönelik ifade edilen bu eylemleri öğrencilerin gerçekleştirmesine yardımcı olacak yönlendirmeler yapma çabasındadır.

Doğrusal İlişkiler ve Günlük Yaşam-1 ders planının işleniş kısmında; başlangıçta içinde 100 ml su bulunan ve tekrar su ile doldurulmaya başlayan kapta 9. ve 16. saniyelerin sonunda ne kadar su bulunacağı öğretmen tarafından öğrencilere sorulmuştur. Bu soru bağlamında sınıfta öğretmen-öğrenciler arasında geçen diyalog aşağıdadır.

Öğretmen: Öncelikle 9. Saniyede kapta ne kadar su olur?
Selin: 450 olur.
Öğretmen: Nasıl buldun?
Selin: Her saniye için 50+50+… yaparak buldum.
Öğretmen: Kısa yolu yok mu bu işin?
Selin: Her saniyede 50 ml su aktığı için 9 ile 50'yi çarparak da bulurum.
Engin: Ama başlangıçta 100 ml su zaten vardı. 100'de eklerim 550 olur.
Öğretmen: Evet güzel, 16. saniyeyi düşünelim.
Fatih: 100 ml zaten vardı. 50, 50… ekleyerek ilerledim. 900 olur.
Öğretmen: Ben örneğin 40. saniyeyi ya da 100. saniyeyi sorsam yine ekleyerek mi ilerlerdin?
Fatih: Ben yine öyle yapardım.
Engin: 16. saniye ile 9. saniye arasında 7 sn fark var. 7 saniyede 7.50'den 350 ml su akar. Bunu 450'nin üzerine ekledim ve başlangıçtaki 100 ml suyu ekledim. 900 ml su olur
Emre: 16 saniyede 16.50'den 800 ml su akar. Başlangıçta 100 ml su olduğundan toplam 900 ml su olur.

Öğrenciler öğretmenin sorusuna cevap verirken ilk aşamada ağırlıklı olarak aritmetik yaklaşımları kullanmıştır. Ancak çözüm önerileri dikkatli bir şekilde incelendiğinde, bir kısmı sadece suyun artış miktarına odaklanarak aritmetik işlemlere (9. saniyeye kadar 50 eklemek şeklinde ardışık toplamlar) dayalı çözüm sunarken, diğer bir kısmı da zaman değişkenine bağlı olarak hacim vurgusu içeren aritmetik işlemler (9. saniyeye 9.50 kadar su akmıştır) yürütmüştür Bu diyalog öğretmenin hem zaman ve hacim değişkenini somut bir şekilde ilişkilendirme hem de bir genel formül elde etme ihtiyacını ortaya koyma çabasının bir göstergesidir. Ancak özellikle ikinci kısma vurgu çok güçlü olmamıştır. Bu dersin devamında diyalogda adı geçen Selin, Engin ve Emre zaman-hacim arasındaki ilişkiyi formüle etmede başarılı olmuştur.

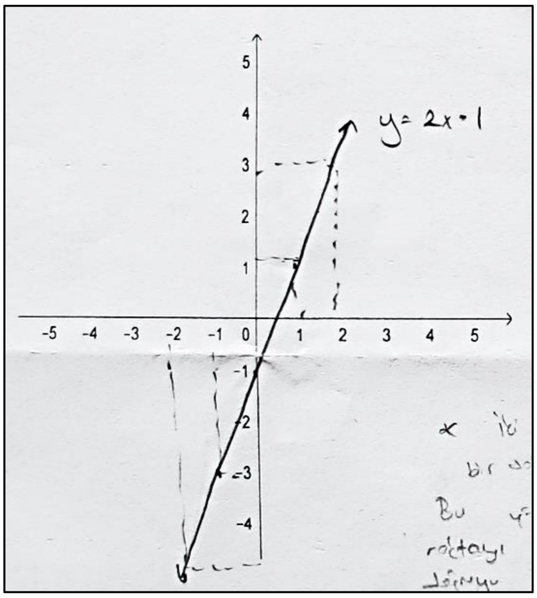
Genel olarak, her iki derste de öğrencilere problem bağlamına konu olan genellemeleri formüle edebilmiştir. Bu süreçte öğretmen öğrencilerden değişkenler arasındaki ilişkiyi veren formülü doğrudan istemek yerine, değişkenlerin birbirine göre nasıl değiştiğine odaklanmalarını, değişim hakkında fikirlerini ortaya atmalarını, bu fikirleri desteklemelerini istemiş ve tüm bunları yapmaları için yeterince bekleme zamanı vermiştir. Tüm bunlar öğrencilerin bağlantı ve ilişki kurma bileşenine yönelik zorlukları aşmalarında yardımcı olmuştur.

3.3. Farklı Gösterimleri Kullanma

Bu bileşen öğrencilerin matematiksel bilgilerini farklı gösterimlerle temsil etmeleri ve bir gösterimden diğer bir gösterime geçiş yapmalarını gerektiren göstergeler içermektedir. Bu göstergeler öğrencilerin sahip olduğu cebirsel fikirleri ifade etmelerine ve somutlaştırmalarına yardımcı olmaktadır. Bu bileşene ait göstergelere tüm ders planlarında yer verilmiş, bir başka deyişle öğrenciler bu eylemleri yapma noktasında cesaretlendirilmiş ve desteklenmiştir.

İlk iki ders planında bağlam, tablo ve cebirsel gösterimler ile bunlar arasındaki geçiş, diğer üç ders planında ise planda tablo, grafik ve cebirsel gösterimler ile bunlar arasındaki geçişler ön planda olmuştur.

Doğrusal İlişkiler ve Günlük Yaşam-1 ders planının giriş kısmındaki problemde öğrencilerden tabloda verilen x değerlerine bağlı olarak y=2x-1 değerlerinin bulunması ve (x,y) şeklinde sıralı ikililerle ifade edilmesi beklenmektedir. Birçok öğrenci tabloyu doğru şekilde doldurabilmiştir. Tabloyu doldurmada zorlanan öğrenciler için y ile x arasındaki ilişki tekrar vurgulanmıştır. Tabloyu doldurulduktan sonra öğrencilere (x,y) sembolik gösteriminin ne anlama geldiği ve neyi ifade ettiği sorulmuştur. Burada bu sıralı ikililerin koordinat sisteminde birer nokta ifade ettiği fikrine yönlendirilerek doğru grafiğine geçiş yapabilmeleri hedeflenmiştir. Öğrenciler, bu ikililerin koordinat sisteminde noktalar olduğunu söylemişlerdir. Bu noktada öğrencilerden buldukları (x,y) sıralı ikililerini çalışma kâğıtlarındaki koordinat sistemine işaretleyerek birleştirmeleri istenmiştir. Doğru grafiğini uygun bir şekilde oluşturan Esra'nın çalışma kağıdının görüntüsü Şekil 4'de verilmektedir. Sınıftaki öğrencilerin çoğu benzer şekilde doğru grafiğini çizebilmiştir. Tablodan grafiğe geçişte sıralı ikilileri referans almak öğrencilerin işini kolaylaştırmış olmakla birlikte grafiğin aslında bu noktalardan meydana geldiği fikrini anlamaya da yardımcıdır.



Şekil 4. Esra'nın defterinde oluşturduğu grafik

Ders devam ederken öğretmen öğrencilere çizdikleri doğru hakkında bazı sorular sormuştur. Aşağıda verilen diyalog bu sorular ve öğrencilerin verdiği cevapları yansıtmaktadır.

Öğretmen: Bu doğruyu oluştururken kaç nokta buldunuz?
Beyza: Beş nokta.
Öğretmen: Acaba doğruyu oluşturmak için kaç nokta yeterli olur? Neden?
Ceyda: Üç nokta yeterlidir. Baştaki, ortadaki ve sondakini bulsaydık yeterliydi.
Gamze: İki tane bulsak yeterli.
Esra: Baştakini ve sondakini bulsak yeterlidir.
Öğretmen: Peki bir şey soracağım. Sadece baştaki ve sondaki mi olmak zorunda? Rastgele iki nokta verilirse olmaz mı?
Beyza: Yeterli olurdu.

Bu diyalog bir doğrunun üzerindeki iki nokta yardımıyla tam olarak belirlenebileceği fikrini gerekçesiyle birlikte inşa edilmesine yardımcı olmak amacıyla öğretmene güzel bir fırsat vermiştir.

Farklı gösterimleri kullanmaya ilişkin olarak öğrenciler başlangıçta bazı noktalar da zorlanmış olmakla birlikte uygulamaya boyunca farklı gösterimlere sıklıkla yapılan vurgu, öğrencilere hedeflenen eylemleri gerçekleştirebilmeleri için verilen yeterli zaman ve doğru yönlendirmeler başlangıçta sahip oldukları zorlukları aşmalarına yardımcı olmuştur.

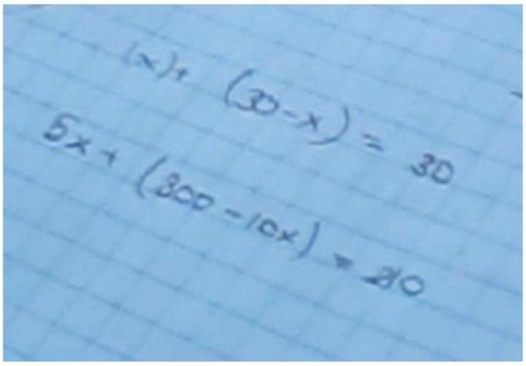
3.4. Sembolleri Anlamlı Kullanma

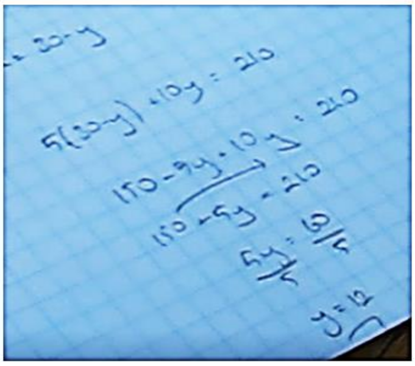
Sembolleri anlamlı kullanma bileşeni öğrencilerin ulaştıkları genellemeleri uygun semboller kullanarak doğru bir şekilde cebirsel olarak ifade etmeyi, denklem ve denklem sistemlerini çözme gibi göstergeler içermektedir. Tüm ders planlarında sembolleri anlamlı kullanımına destekleyecek örnekler veya etkinlikler yer almıştır.

Sembolleri anlamlı kullanımı bileşenine dönük analizler öğrencilerin bu bileşenle ilişkili eylemleri gerçekleştirirken genel olarak zorlandıklarını ortaya koymaktadır. Doğrusal Denklem Sistemleri-3 ders planının işlenişinde dersin geçiş/geliştirme kısmında yer alan bir örnekte kumbarasında sadece 5 ve 10 liralık banknotlar toplayan Yusuf'un toplam 30 banknotu ve 210 lirası olduğu belirtilerek kumbaradaki 5 ve 10 liralık banknotların sayısı sorulmuştur. Öğrenciler bu probleme uygun denklemi oluşturmada oldukça zorlanmıştır. Bu problemle ilgili öğretmen ve öğrencisi Salih arasında gerçekleşen diyalog aşağıdadır.

Öğretmen: x tane 5 TL varsa toplam kaç TL olur?
Salih: ……..?
Öğretmen: 3 tane 5 TL varsa toplam kaç TL olur?
Salih: 15 TL
Öğretmen: Bulmak için ne yaptın?
Salih: Çarptım.
Öğretmen: Aynı şekilde düşüneceksin. x tane var diyor.
Salih: 5x olur.
Öğretmen: Aynı şekilde 10 TL'lik banknotları düşünürsen.
Salih: 10y olur. Toplam miktarda 5x+10y=210 olur.

Öğretmen öğrenci için aşina olan bir durum üzerinden örnekleme yaparak doğru çıkarım yapmasına destek olmuştur. Bu aşamada bazı öğrenciler bilinmeyen sayısını düşürerek (y yerine 30-x almak gibi) probleme çözüm sunmaya çalışmıştır. Şekil 5'de bu şekilde çözüm sunan öğrencilerin defterlerinden kesit yer almaktadır.



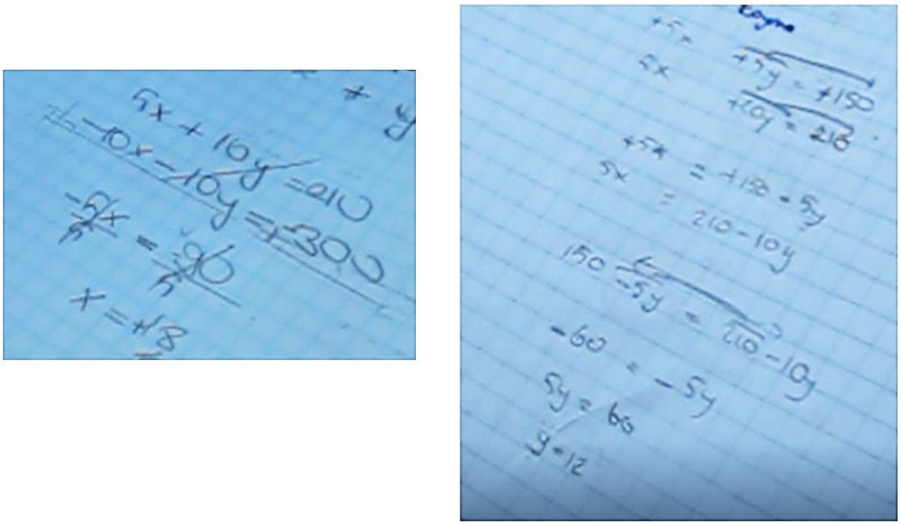


Şekil 5. Öğrenci defterlerinden örnek çözümler

Bir kısım öğrenciler yok etme yöntemi kullanarak çözüm yapmaya çalışmıştır. Aynı ders ele alınan bir başka problem durumunda öğrenciler elde ettikleri denklem sistemindeki denklemleri hiçbir müdahale yapmadan taraf tarafa toplayınca kolaylıkla çözüme ulaşabilmişti. Bu problemde yok etme metodunun uygulanabilmesi için denklemlerden birinin (5x+10y=210 veya x+y=30) negatif bir sayı ile çarpılması gerekmektedir. Bu duruma ilişkin Beyza'nın sorusu ile başlayan diyalog aşağıdadır.

Beyza: Bir önceki problemdeki denklemimizde x+y=175 ve x-y=105 denklemleri vardı. Taraf tarafa toplanınca 2x kaldı bilinmeyen olarak y yok oldu. Yok olması toplamlarının 0 olmasıydı. Ama bu problemin denklemlerini taraf tarafa toplasam da çıkarsam da hiçbiri yok olmuyor.
Öğretmen: Denklemleriniz bilinmeyenlerden birinin yok olması için hazır değilse hazır duruma getirmek için nasıl bir yol izlersiniz?
Esra: Eksi ile çarparım.
Öğretmen: Sadece eksi ile denklemlerden birini çarparak toplarsanız yeni iki değişkenli denklemler elde edersiniz (Tahtada göstererek yapılmıştır).
Esra: x+y=30 denkleminde y'yi -10 ile çarparım.
Öğretmen: Sadece y'yi değiştirirsen denklemin eşitliği etkilenmez mi bu durumdan?
Gamze: Bence x+y=30 denkleminin tamamını -5 ile çarparız.
Öğretmen: Olabilir. Ne ile çarpacağınıza karar verirken hangi bilinmeyeni yok etmek istediğinizi düşünüyorsunuz. x+y=30 denklemindeki x, 5x+10y=210 denkleminde ki x ile hangi durumda toplanınca yok olur? Ya da x+y=30 denklemindeki y, 5x+10y=210 denkleminde ki y ile hangi durumda toplanınca yok olur?
Ahmet: Birinci denklemi genişletmek yerine ikinci denklemi -5 ile bölsek olur mu?

Öğretmen burada doğrudan bir işlemsel vurgu barındıran bir öğretimsel açıklama yaparak iki denklemde bilinmeyenlerden birinin katsayısını birbirinin zıt işaretlisi yapacak herhangi bir düzenlemenin uygun olacağını ifade etmiştir. Sistemdeki denklemleri doğru bir şekilde oluşturarak yok etme yöntemiyle çözüme ulaşan bazı öğrenci cevapları Şekil 6'dadır



Şekil 6. Yok etme yöntemiyle çözüme ulaşan öğrenci cevapları

Uygulama bütün olarak düşünüldüğünde; öğrencilerin sembolleri kullanırken karar verme süreçlerinde mantıksal çıkarımlarından ziyade sıklıkla ezbere prosedürleri referans almaktadır. Burada denklem sistemini çözme sürecinde yapacakları müdahalelere karar vermede etkili olan mekanizma ezbere prosedürler gibi görünmektedir. Problemleri anlamlandırarak verileri cebirsel ifadelere çevirmekte ve çözüm stratejileri geliştirmekte zorlanmışlardır.

3.5. Eleştirel Düşünme ve Fonksiyonlarla Çalışma

Eleştirel düşünme bileşeni doğası gereği tüm ders planı ve uygulamalarda yer almıştır. Fonksiyonlarla çalışma bileşenine ilişkin göstergeler temelde ilk iki ders planı ile doğrudan ilişkili olsa da doğrusal denklem sistemlerinin grafiksel çözümlerinde de işe koşulmaktadır.

Doğrusal İlişkiler ve Günlük Yaşam-2 dersinde öğrencilere; yeni evlenecek bir çift düğün davetiyesi yaptırmak istediği, farklı matbaalardan fiyat aldıkları ve mevcut iki seçenekten hangisinin daha karlı olduğunu belirlemelerini gerektiren bir problem durumu verilmiştir. Bu problemin çözüm sürecinde; öğrencilerin her iki duruma karşılık gelen fonksiyonel ilişkileri oluşturmalarına ve bu seçenekleri karşılaştırmalarına destek olması için öğretmen tablo ve grafik gösterimlerden yararlanmıştır. Problemin çözüm sürecinde farklı öğrencilerden farklı cevaplar gelmiştir. Bunun üzerine öğretmen ile sınıf arasında geçen diyaloglardan biri aşağıdadır.

Öğretmen: 150 davetiye için Değer Matbaada ne kadar para ödüyorsunuz?
Engin: İki katı kadar 150. 2’den 300 lira öderiz.
Öğretmen: Saygı Basımdan alırsanız 150 davetiye için ne kadar ödeme yaparsınız?
Salih: 200 başlangıçta vereceğiz zaten. 150 davetiye için de 150 lira ödersem toplam 350 lira öderiz.
Öğretmen: 150 davetiye yaptırırlarsa hangi davetiyeciden yaptırmak bu çift için daha kazançlı olur?
Okan: Değer Matbaadan yaptırırlarsa daha karlı olur. 50 lira ceplerinde kalır.
Öğretmen: 250 davetiye için Değer Matbaa ve Saygı Basımda ki ödeme miktarlarınız ne kadar?
Esra: Değer matbaa için 250. 2 den 500 liradır.
Beyza: Saygı Basımda 250 davetiye için 200+250’den 450 liradır.
Öğretmen: Hangisini tercih etmek daha kazançlıdır?
Doğan: Burada da Saygı Basımı tercih etmek daha kazançlıdır.
Öğretmen: Her durumda kazançlı olan seçenek var mıdır?
Salih: Böyle bir seçenek yoktur.
Öğretmen: Neden böyledir? Her iki seçenekte de aynı davetiye sayısına eşit miktarda para ödenen bir durum olacak mıdır?
Esra: Olacaktır.
Öğretmen: Böyle bir durum varsa nasıl olacak? Bu durumun öncesini ve sonrasını karşılaştırır mısınız?

Yukarıdaki diyalogda öğretmen her iki matbaanın sunduğu teklifi farklı değerler için karşılaştırma noktasında öğrencileri teşvik etmekte, doğru çıkarım yapabilmeleri için kritik bir noktaya (her iki matbaa için eşit ücret ödenecek davetiye sayısı) işaret etmektedir. Bu problem bağlamında her ne kadar öğrencilerin ilgili fonksiyonel ilişkileri sembolik olarak ifade etmesine destek olacak tablo gösterimler (Bkz. Şekil 7) öğrencilerle birlikte oluşturulsa da öğrenciler “x davetiye için her iki seçenekte de ne kadar ödeneceği” sorusuna cevap ermede oldukça zorlanmıştır.

Davetiye Sayısı (x)	Ödenecek Para Miktarı (y)	İlişki
0	200	200
1	201	200+1.1
2	202	200+1.2
3	203	200+1.3
…	…	…
25	225	200+1.25
50	250	200+1.50
100	300	200+1.100
…	…	…

Şekil 7. Saygı matbaasına ödenecek ücreti gösteren tablo

Bu bileşenler ile ilgili olarak genel bir değerlendirme yapmak gerekirse; öğrenciler uygun sorular ve destekle mevcut duruma ilişkin karşılaştırmalar yapabilmekte, yorum ve çıkarım yapmada desteğe ihtiyaç duymaktadır. Fonksiyonel ilişkileri oluşturmada tablo ve grafikler gösterimler öğrencilere destek olsa da öğrenciler söz konusu fonksiyonel ilişkiyi sembolik biçimde ifade etmede ve kullanmada zorlanmaktadır.

4.Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmanın odağında öğrencilerin cebirsel akıl yürütmeyi desteklemek amaçlı geliştirilen bir ortamdan yansımalar sunmak yer almaktadır. Bu doğrultuda bir eylem planı geliştirilmiş ve gerçek bir sınıf ortamında uygulanmıştır. Çalışmadan elde edilen en temel sonuç geliştirilen öğrenme ortamının öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini genel anlamda desteklediğidir.

Cebirsel fikirleri, düşünceleri, yaklaşımları anlamlandırma tüm uygulamalar boyunca dikkate alınan bileşenlerden biri olmuştur. Anlamlandırma eylemi hem bir başlangıç noktası oluşturması hem de işleyen bir süreci sürekli olarak desteklemesi açısından önemlidir. Öğrencilerin cebirle ilgili fikirleri, çoğunlukla aritmetik temelli geçmiş deneyimlerinden kaynaklanmaktadır (Kieran, 1992; Herscovics & Linchevski, 1994; Sfard, 1995). Bu durumun beklenen bir sonucu olarak, bu çalışmadan elde edilen bulgular öğrencilerin cebirsel fikirleri anlamlandırmada zorluk yaşadığı ortaya koymaktadır. Yapılan analizler, öğrencilerin sınıf içi uygulamalar esnasında anlamlandırmayı kolaylaştıracak etkili iletişimi kurmakta güçlük çektiğini ortaya koymaktadır. Öğrencilerin anlamlandırma süreçlerini destekleyecek nitelikte öğretmen ve/veya diğer öğrencilerle soru-cevap etkileşimine girmeme şeklindeki eğilimlerinin, hem anlamlandırma hem de anlamlandırmanın temel teşkil ettiği diğer bileşenlerle ilgili performanslarını olumsuz etkilediği belirlenmiştir. Aksine, Yayla, Memduhoğlu ve Saylık (2017) öğrencilerin daha fazla sorduğu ve bu sorulara cevap alabildiği sınıflarda, akademik başarının arttığını belirtmiştir.

Genellemelere ulaşma ve bunları formüle edip doğrulama matematiğin en önemli işlevleri arasında yer almaktadır. Diğer taraftan öğrencilerin genelleme süreçlerinde zorlandıkları yapılan araştırmalarla ortaya konmuştur. Bu çalışmada genellemeleri formüle etme cebirsel akıl yürütme açısından üzerinde durulan bir beceri olmuştur. Genelleye konu olan değişkenler arasındaki ilişkilerin farklı gösterimler (özellikle tablo ve sözel) vasıtasıyla analiz edilmesi genellemeyi formüle etme sürecini kolaylaştıran bir süreç olmuştur. Bu süreçte öğrenciler fikirleri ortaya atma, bunları destekleyen veya çürüten kanıtlar sunma konusunda desteklenmiştir.

Cebirsel akıl yürütme, matematiksel semboller, tablolar, grafikler ve eşitlikler gibi farklı temsillerin anlamlı bir şekilde kullanılmasını gerektirir (Herbert & Brown, 1997). Ancak, yapılan çalışmalara öğrencilerin bu temsilleri etkili bir şekilde kullanma konusunda zorlandığı, sembolleri zihinsel bir fikirle ilişkilendiremedikleri ve genellemeleri benzer durumlara uyarlamakta sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir (Capraro & Joffrion, 2006). Uygulamalar boyunca farklı gösterimlere sıklıkla vurgu yapılmış, gösterimler arası geçiş gerektiren durumlarla öğrenciler meşgul olmuştur. Bu durumun olumlu yansımaları uygulamanın ilerleyen safhalarında daha belirgin bir şekilde fark edilmiştir. Bu ise öğrenme ortamı ve öğretmenin öğrencilere bu türden fırsatlar vermesinin önemini tekrar ortaya koymaktadır.

Yapılan çalışma öğrencilerin en fazla sembolleri anlamlı kullanma bileşenine dönük eylemlerde zorluk yaşadığını ortaya koymaktadır. Araştırma öğrencilerin sembolleri zihinsel bir anlamla ilişkilendirmede, ayrıca denklem kurma, genellemeleri veya fonksiyonel ilişkileri formüle etme amaçlı kullanımında güçlük çektiğini göstermektedir. Capraro ve Joffrion (2006) yedinci ve sekizinci sınıflarda bile birçok öğrencilerin cebirsel ifade ve ilişkilere geçiş için yeterince hazır olmadıklarını belirtmiştir. Bir bakıma sembolleri kullanma ve semboller üzerinden düşünmenin doğasından kaynaklı zorluğa dikkat çekmiştir. Öğrencilerin sembolleri anlamlı bir şekilde kullanmaya ilişkin önceki deneyimlerinin yetersizliği de buna eklenince, ki yapılan çalışmada bu durum açık bir şekilde gözlemlenmiştir, uygulama süreci daha zorlaşmaktadır. Bu ise bu sorunun belli bir sınıf seviyesinde, ne kadar iyi planlanmış olursa olsun, yapılacak müdahalerle aşılamayacağı, okul öncesinden itibaren öğrencilerin cebirsel düşünme açısından bilinçli bir şekilde desteklenmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Eleştirel düşünme becerisi, cebirsel akıl yürütmenin geliştirilmesinde temel bir rol oynamaktadır. Araştırmalar, eleştirel düşünmenin, öğrencilerin matematiksel kavramları sorgulamalarını, analiz etmelerini ve genellemeler yapmalarını desteklediğini göstermektedir (Baykul, 2009). Ancak, çalışmadan elde edilen sonuçlar öğrencilerin bu süreçte daha fazla cesarete ve yönlendirmeye ihtiyaç duyduğu gözlemlenmiştir. Öğrencilerin tüm eğitim öğretim hayatları boyunca sorgulayan, kritik eden bir yapıda yetiştirilmesi cebirsel akıl yürütme süreçlerini de destekleyecektir.

Öğretmenler sadece kalıplaşmış görevlerle öğrencilerini meşgul etmekle, onların cebirsel düşünme ve akıl yürütme becerini geliştiremezler. Bunun yerine bu çalışmada örneklendirildiği gibi gerçek yaşamla bağlantılı, hedefleri açık (burada cebirsel akıl yürütme bileşen/göstergeleri bunu sağladı), öğrenciyi odağa alan öğrenme ortamları tasarlamalı ve uygulamalıdır.

Not: Bu çalışma, ikinci yazarın danışmanlığında birinci yazarın yüksek lisans tezine dayanmaktadır.

Finansman: Bu çalışma için herhangi bir fon bildirilmemiştir.

Çıkar beyanı: Yazar herhangi bir çıkar çatışması beyan etmemektedir.

Kaynaklar / References

Akkan, Y., Baki, A., & Çakıroğlu, Ü. (2012). 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 43,* 1-13.

Bağdat, O & Anapa Saban, P. (2014). İlköğretim 8. Sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi. *International Journal of Social Science, 26,* 473-196.

Barnhart, T., & van Es, E. A. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyse and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45,* 83-93.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde Matematik Öğretimi 6-8. Sınıflar.* Pagem Akademi Yayıncılık.

Bike-Kalkan, D. (2014). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapıları (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi),* Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(5),* 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M., Brizuela B.M., Gardiner, A.M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95, 181-202.*

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46(1),* 39-87.

Capraro, M. M., & Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology, 27(2-3),*147-164. https://doi.org/10.1080/02702710600642467

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi (Yayınlanmamış doktora tezi).* Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Dede, Y., & Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24,* 180-185.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. *In J. Cai & E. Knuth (Eds.), Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (s. 215-238). Springer.

Erdem, Ö., & Sarpkaya-Aktaş, G. (2018). Ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında yaşadıkları kavram yanılgılarının giderilmesinde etkinlik temelli öğretimin değerlendirilmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education 9*(2), 312-338.

Herbert, K., & Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3(6),* 340-344.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27(1),* 59-78. doi:10.1007/BF01284528

Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education, 58(1),* 47-61.

Kanbir, S. (2016). *Middle school students' development of algebraic reasoning: Comparing effects of three instructional approaches (visual, structural, and modeling).* NCTM Research Conference, San Francisco.

Kaput, J. J. (1995). Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In C. B. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

Kaput, J. J. (1999). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding. Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). *What is algebra? What is algebraic reasoning? In Algebra in the early grades* (s. 5-17). Routledge.

Karasar, N. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Nobel Yayınları.

Kaya, D., & Keşan, C. (2017). Cebir öğreniminde eşitlik kavramı: Öğrenci düşünceleri üzerine bir inceleme. *Eğitim ve Bilim Dergisi, 42(191),* 37-51.

Kieran, C., (1992). *The Learning and Teaching of School Algebra. In D.A. Grouws (Eds.)*, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (s. 390-419). New York: Macmillan.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *ZDM Mathematics Education, 37(1)*, 68-76.

Kuzu, A. (2009). Öğretmen yetiştirme ve meslek gelişimindebeylem araştırması. *Uluslararası Sosyal Aratırmalar* Dergisi 2(6), 425-433.

Leitze, A. R., & Kitt, N. A. (2000). Using Homemade Algebra Tiles to Develop Algebra and Prealgebra Concepts. Alındığı adres: http://mathforum.org/kb/servlet/JiveServ-let/download/157-1629543-6202516-475281/algebra%20tiles.pdf

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically.* Pearson.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2005). *İlköğretim matematik dersi 6-8 öğretim programı.* Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1-8. sınıflar).* Ankara.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2020). *İlköğretim matematik dersi 6-8 öğretim programı.* Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2024). *İlköğretim matematik dersi 6-8 öğretim programı.* Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2020). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

O'Daffer, P. G., & Thornquist, B. A. (1993). *Critical thinking, mathematical reasoning, and proof. In Research ideas for the classroom.* New York: Maxwell Macmillan International.

Ontario Ministry of Education (OME). (2013). *Paying attention to algebraic reasoning: K-12.* Toronto, ON: Queen's Printer. Alındığı adres: http://www.edu.gov.on.ca/ eng/ literacynumeracy/Paying AttentiontoAlgebra.pdf.

Öz, Ö. (2017). Matematikte cebirsel akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi. *Matematik Eğitimi Araştırmaları Dergisi, 10(1),* 35-50.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *14(1)*, 15–39.

Sherin, M. G., Linsenmeier, K. A., & van Es, E. A. (2009). Selecting video clips to promote mathhematics teachers' discussion of student thinking. *Journal of Teacher Education, 60*(3), 213-230.

Stacey, K. (2006). What is Mathematical Thinking And Why is It Important?. *Journal of Mathematical Behavior, 24(48)*, 341-350.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24,* 234-243.

Umay, A., & Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*, 188-195.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (8th ed.).* Pearson Education Inc.

Yayla, A., Memduhoğlu, H. B., & Saylik, N. (2017). İlkokul öğrencilerinde eleştirel ve sorgulayıcı düşünmeyi geliştirmeye yönelik yeni bir öğretim tekniği denemesi: soru topları tekniği. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi (elektronik), 16*(60), 145-160. http://search/yayin/detay/276573