A Comparison of Turkish and Singaporean Textbooks in Relation to the Instructional Content on Mental Computation in Arithmetic Operations

Suphi Önder Bütüner[a]

[a] Yozgat Bozok University, Faculty of Education, Yozgat/Turkey (ORCID: 0000-0001-7083-6549)

Article History: Received: 17 September 2020; Accepted: 22 December 2020; Published online: 31 December 2020

Abstract: This study aims to reveal how Turkish and Singaporean textbooks introduce the topic of mental computation in arithmetic operations, what the instructional process is like and what mental computation strategies are included. Three Turkish textbooks were compared against six Singaporean books, My Pals Are Here and Targeting Mathematics. The analyses showed that the Singaporean book entitled My Pals Are Here had the most diverse strategies in the mental computation of arithmetic operations. While the Turkish book TR1 and the Singaporean book TAR introduced the topics of mental addition and subtraction in grade 3 with strategy training, the Turkish book TR2 and the Singaporean book MP introduced the same topics in grade 3 with a contextual problem, and the students were asked to solve the problems by inventing different strategies. In Singaporean books, mental multiplication was taught with the strategies N10, N10C and 10^n, and mental division with N10 and 10^n. The Turkish book TR3 introduced the rule on mentally dividing and multiplying a number with the exponents of 10, and did not mention strategies such as N10 or N10C. Another outcome of the study was that All textbooks expect students to use different strategies when mentally computing arithmetic operations. However, they do not contain any content to encourage students to identify the best strategy among those that they have invented for mental computations or discuss it with their friends. Overall, Singaporean books may be said to offer students more learning opportunities in the mental computation of arithmetic operations.

Keywords: Addition and subtraction operations, mental computation, multiplication and division operations, strategy, Turkish and Singaporean mathematics textbooks

Öz: Bu çalışma, Türk ve Singapur ders kitaplarında yer verilen zihinden hesaplama stratejilerini karşılaştırmak ve öğrencilerin farklı stratejiler kullanmaları, icat ettikleri stratejileri arkadaşlarıyla tartışmaları amacıyla ders kitaplarının ne tür uygulamalar ve açıklamalar içerdiğini ortaya koymak amacıyla yürütülmüştür. Çalışmada üç Türk, altı Singapur matematik ders kitabı incelenmiştir. Yapılan analizler sonucunda, aritmetik işlemlerin zihinden hesaplanmasında strateji çeşitliliği açısından en zengin kitabın "My Pals Are Here" isimli Singapur kitabı olduğu tespit edilmiştir. Singapur kitaplarında çarpma ve bölme işleminin zihinden hesabında farklı stratejilere yer verilmiş ve küme modellerinden yararlanılmıştır. Türk kitaplarında sadece bir sayının 10'un kuvvetleri ile zihinden nasıl çarpılacağı ve 10'nun kuvvetlerine zihinden nasıl bölüneceği kural verilerek açıklanmıştır. Tüm kitaplarda öğrencilerden, aritmetik işlemleri zihinden yaparken farklı stratejiler kullanmaları beklenmektedir. Ancak ders kitaplarında, öğrencilerin icat ettikleri stratejiler arasında, işlemin zihinden hesaplanmasında kullanımı en uygun stratejinin hangisi olması gerektiğini düşünmelerine ve akranlarıyla tartışmalarına yönelik bir içeriğe yer verilmemiştir. Genel olarak değerlendirildiğinde, Singapur kitaplarının aritmetik işlemlerin zihinden hesaplanması konusunda öğrencilere daha fazla öğrenme fırsatı sağladığı söylenebilir.

Anahtar Kelimeler: Türk ve Singapur Matematik Ders Kitapları, Zihinden Hesap, Strateji, Toplama ve Çıkarma İşlemleri, Çarpma ve Bölme İşlemleri

Türkçe sürüm için tıklayınız

1. Introduction

Integrating mental computation into mathematics curricula may support the development of number sense (McIntosh, 1998). The principles and standards of the National Council of Mathematics Teachers emphasize that elementary students' number sense skills need to be developed. Number sense requires students to know numbers, understand the relations between them, and use flexible and practical solution strategies (mental computations and estimations) in their solutions (Reys, 1994; Sowder, 1992; Yang, Hsu & Huang, 2004). The National Council of Mathematics Teachers mentions the 6 dimensions of number sense: "separating numbers appropriately", "using reference numbers such as "100 or 1/2", "knowing the decimal number system", "estimating", "using the relations between arithmetic operations in problem solving", "grasping number size" (NCTM, 2000, p.32). McIntosh, Reys and Reys (1997) emphasize that number sense includes both mental computation and estimation, and cannot be thought of separately from each other (p.323). Mental computation is the act of finding the accurate solution to an operation without using tools such as a pen, paper or a calculator (Reys, Reys & Hope, 1993). Students should be able to solve daily problems mentally in a practical and easy way. Maclellan (2001) states that using mechanical rules when solving problems prevents students from considering or questioning the steps of the operations. In contrast, during a mental computation, students continuously think about the relations between numbers. Students' thinking strategies provide information about

Corresponding Author: Suphi Önder Bütüner **email:** s.onder.butuner@bozok.edu.tr; s.onder.butuner@yobu.edu.tr

Citation Information: Bütüner, S. Ö. (2020). A comparison of Turkish and Singaporean textbooks in relation to the instructional content on mental computation in arithmetic operations. *Turkish Journal of Mathematics Education*, *1*(1), 79-112.

whether they have conceptually learned the relations between numbers, the meaning of operations, the relations between operations and the structure of the digit number system (McIntosh, Reys & Reys, 1997). For example, an elementary student can mentally calculate how much money he should pay when he buys two pencils of 19 TL each from a stationer's by following the operational steps $20x2 = 40$, $2x1 = 2$, $40 - 2 = 38$ (Yang & Huang, 2013). Most students tend to write numbers vertically to solve arithmetic operations. Even though this solution strategy may be easy to learn, it does not require students to make judgments, but to blindly follow procedures (Heirdsfield & Cooper, 2004a). Therefore, reaching the solution is not the only indicator of success (Reys & Yang, 1998). For example, carrying out the operation 39x7 may look difficult at first glance, but a student who has learned the conceptual meaning of multiplication and can establish the relations between numbers can multiply 40 and 7, and then subtract 7 from the resulting 280 and reach 273. Another student may ignore this judgment process and write 39 and 7 vertically in an attempt to solve the operation. The important thing for the latter student would be to follow the multiplication procedures and find the accurate result. Using traditional algorithms in arithmetic operations has a negative effect on the development of students' mental computation skills. Kamii, Lewis and Livingston (1993) found that 60% of third graders who had not been taught the traditional multiplication algorithm (multiplication by writing numbers vertically) carried out the operation mentally by using the strategy of separating 13x11=(13x10=130; 130+13=143), whereas only 15% of the fourth graders who had learned the traditional algorithm could mentally carry out the same operation accurately.

1.1. Views on the Teaching of Mental Computation Strategies

The literature mentions two approaches to the teaching of mental computation strategies. The first is students inventing and using their own mental computation strategies (Buzeika, 1999; Heirdsfield, 2006; Thompson, 2010) and the second is teaching certain strategies (Beishuizen, 1999; Murphy, 1999; Thompson, 2010). In England, various initiatives in line with the first approach were made for the teaching of mental computation strategies, and a series of reports were published (DES, 1991; DfEE, 1999). The results show that not all students display the same performance in inventing and using mental computation strategies (Askew, Bibby & Brown, 1997; Gray, 1997). Therefore, SCAA (1997) claims that the development of mental computation strategies should not be left to chance. Parallel to this view, Klein, Beishuizen and Treffers (1998) wrote that students who have problems with addition and subtraction problems need teacher support in using mental computation strategies. Blote, Klein and Beishuizen (2000) listed the factors affecting students' strategy preferences as not knowing when or how to use a given strategy, not being able to identify the more useful strategy for mental computation, and the classroom environment itself. Their claim has been corroborated by research results. To illustrate, when American students perform additions mentally, they prefer to separate both added numbers into their tens and units and use the separation strategy (1010) as they learn this strategy starting from early school years (Heirdsfield & Cooper, 2004). On the other hand, European countries instead prefer the strategy of separating the second added number into tens and units (N10) in additions, and separating the resulting number into tens and units (N10) in subtractions. This is because this strategy is believed to minimize student risk for error (Heirdsfield and Cooper, 2004; Klein & Beishuizen, 1994). Blote, Klein and Beishuizen (2000) studied the mental computation strategies preferred by Dutch second graders in addition and subtraction operations. For the mental computation of additions and subtractions, students were first taught the strategy of separating the second number into tens and units (N10), and then the strategy of separating both numbers in the operation into tens and units (1010). While the students used the N10 strategy to start with, they tended to use the 1010 strategy after learning about it. These results show that the classroom context is a factor that affects students' strategy preferences. On the other hand, certain studies have shown that, without any strategy training, students can develop their own strategies (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema & Empson, 1998; Heirdsfield, 2000; Kamii, Lewis & Livingston, 1993). Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema and Empson (1998) also stated that using classroom discussions about students' invented strategies, verbal contextual problems and classroom materials encourage students to invent mental computation strategies. According to Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema and Empson (1998), direct teaching of mental computation strategies bring students face to face with the risk of perceiving these strategies as a mechanical rule. Therefore, encouraging students to discuss their mental computation strategies and to consider the mental computation strategies that may be used to solve a problem may help them develop more effective solution strategies (Yang & Huang, 2013).

The views and conclusions in the literature suggest that due to the differences in students' previous experiences and knowledge, they do not perform equally in using and inventing mental computation strategies. In addition, the direct teaching of mental computation strategies may lead students to use these strategies mechanically. Whether the teachers use the first or second approach, they should know how to use mental computation strategies in arithmetic operations, and have experience of the better strategy in different situations. In order to achieve this goal, textbooks may include information and practice on different mental computation strategies and those that may be more effective in the solution of various questions and contextual problems. This is essential as textbooks are the primary source used by teachers. In this way, teachers can learn different mental computation strategies to be used in arithmetic operations, and find the opportunity to identify the best mental computation strategies for different questions. Indeed, Turkish and Singaporean mathematics curricula emphasize the need to "provide students with opportunities to invent various mental computation strategies". However, textbook contents may not be reflecting this. It should be noted that inadequate subject area knowledge on the inclusion and use of mental computation strategies in textbooks may discourage teacher guidance in strategy building and teacher management of classroom discussions on students' invented strategies. Owing to these, it is essential to identify the mental computation strategies included in mathematics textbooks, as well as the explanations and practice they include about using different strategies in mental arithmetic operations, encouraging students to invent their own strategies, and finding the best mental computation strategy for a given question.

On the other hand, international exam results show that Turkish students have poor performance in mental computation skills and in the numbers learning area. In contrast, Singaporean students were among the top groups in this area (Mullis et al., 2000; 2008; 2012; 2016). The differences between Turkish and Singaporean students' performances may be attributed to many different reasons. One of these may be the contents of Mathematics textbooks. Textbooks are the primary source that teachers use while teaching mathematics (Beaton, Mullis, Martin, Gonzales, Kelly & Smith, 1996). As different textbooks provide students with different learning opportunities, comparative studies on these books may help explain the differences between student performance (Mesa 2004; Valverda Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002; Zhu & Fan 2006). Therefore, comparative studies have become popular in recent years. Most of these studies have used textbooks from China, Korea, Japan, Taiwan, Singapore and Finland, as students from these countries call among the top in international exams such as the TIMSS or PISA. Mathematics textbooks from Turkey have mostly been compared with their American counterparts (Kar & Işık 2015; Kar, Güler, Şen & Özdemir, 2018) and with American-Singaporean textbooks (Erbaş, Alacacı & Bulut 2012; Özer & Sezer 2014). Turkish textbooks have been compared with Singaporean books only with respect to their design characteristics (Erbaş, Alacacı and Bulut 2012) and problem type (Özer & Sezer, 2014). This study, however, compares Turkish and Singaporean textbooks with respect to their instructional content in the topic of mental computation in additions, subtractions, multiplications and divisions. Answers were sought to the following questions:

- What kind of information and practices do Turkish and Singaporean textbooks include to enable students to invent their own unique strategies in mental computations and to discuss these with their peers?
- Which strategies do Turkish and Singaporean textbooks include in the mental computing of arithmetic operations?

1.2. Mental Computation Strategies for Arithmetic Operations

Below are examples of each mental computation strategy for the operations of addition, subtraction, multiplication, and division. Table 1 shows to names of the mental computation strategies and examples (Beishuizen & Anghileri, 1998; Buys, 2001; Erdem, 2016; Heirdsfield & Cooper, 2004; Lemonidis, 2015; Moyo & Samson, 2014; Thompson, 1999; 2000; Van De Walle, 2010; Varol & Farran, 2007; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007; Yang & Huang, 2013).

Tablo 1. Mental Computation Strategies for Arithmetic Operations

Strategy	Addition 29+36; 49+86	Subtraction 86-28; 58-35	Multiplication	Division
COB	120 130 140	110 100 90	23x5=? 23+23=46+23=69+23=92+23 =115 or 23+23=46, 23+23=46, 46+23=69, 69+46= 115 8x25=? 2x25=50, 50+50=100, 100+100=200 5x8=5, 10, 15…	128/8=64, 32, 16 128/2=64, 64/2=32, 32/2=16; 24/4=? 24-4=20 20-4=16 16-4=12 12-4=8
1010	20+30=50 9+6=15 50+15=65 40+80=120 9+6=15 120+15=135	80-20=60 6-8=(-2) 60+(-2)=58 50-30=20 8-5=3 20+3=23	11x18=(10+1)x(10+8) (10x10)+(10x8)+(1x10)+(1x8) 8x25=2x4x25=2x100=200	

Table 1 continued

N10, 10N	29+30=59 59+6=65 or 20+36=56 56+9=65 49+80=129 129+6=135	86-20=66 66-8=58 58-30=28 28-5=23 50-35=15 15+8=23	28x4=? 20x4=80 8x4=32 80+32=112	116/4=? 100/4=25 16/4=4 25+4=29
10s	20+30=50 50+9=59 59+6=65 40+80=120 120+9=129 129+6=135	80-20=60 60+6=66 66-8=58 50-30=20 20+8=28 28-5=23	46x7=? 40x10=400 40x3=120 400-120=280 6x7=42 280+42=322	
SC		30-28=2 56+2=58 40-35=5 18+5=23		
M 5,10,100	4+36=40 25+40=65 86=85+1 49+1=50 85+50=135	86-6=80 80-22=58 86=78+8 78-28=50 50+8=58 86-26=60 60-2=58		
N10C	30+36=66 66-1=65 50+86=136 136-1=135	86-30=56 56+2=58 veya 60-35=25 25+2=27	28x4=? 30x4=120 2x4=8 120-8=112 8x99=? 8x100=800 800-8=792 18x25=18x100=1800 1800/4=450	116/4=? 120/4=30 4/4=1 30-1=29 100/5=20 100/10=10 10x2=20
A10	29+1=30 30+35=65 49+1=50 50+85=135 88-30=58		28x25=? (28:2)x(25x2)= (14:2)x(50x2)=700	$33 \div 1\frac{1}{2}$=? 66÷3=22
ND	16+18=? 16+16=32 32+2=34	92-45=? (45+45+2)-45 45+2=47		
GCN	34+8+16=? (34+16)+8 50+8=58	63-8-13=? (63-13)-8 50-8=42	2x34x5=? (2x5)x34=10x34=340	
10^n			12x100=1200	1200÷10=120

In the strategy of counting forwards or backwards rhythmically (COB), the solution is found by counting one by one, two by two, five by five and so on forwards and backwards. In multiplications and divisions with this strategy, repeated addition or repeated subtraction is used. In the 1010 strategy, the numbers are written in tens and units. For example, in 58-35, the numbers are separated as 50 and 8, 30 and 5. While using the 1010 strategy in 11x18, the operation is organized as (10+1)x(10+8). While the second number is written in tens and units in the N10 strategy, the first number is written in tens and units in the 10N strategy. For instance, as 58-35 is performed with the N10 strategy, the second number is separated into 30 and 5. On the other hand, as the same question is solved with the 10N strategy, the first number is separated into 50 and 8. When applying the N10 strategy in the multiplication 28x4, the number 28 is first separated into 20 and 8; each one then multiplied with 4; and finally the resulting numbers are added. Similarly, 116/4 is solved by separating 116 into 100 and 16, and dividing each into 4. The resulting numbers are then added to reach the solution. In the 10s strategy, the tens of both numbers are first treated (for 58-35, 50-30=20). Following this, the units of the first number and then the second number are treated in order to reach the solution (20+8=28, 28-5=23). While subtracting with the SC strategy, one of the parts of the number is selected to be the closest ten to the other. To illustrate, in 58-37, the closest ten to 37 is 40. Therefore, 58 is separated into 40 and 18. Then the solution is obtained by 40- 37=3 and 3+18=21. In the M5,10,100 strategy, the numbers are separated in the operation to reach the multiples of 5, 10 and 100. For example, in 29+36, 29 can be separated into 4 and 25. The N10C strategy requires rounding up one of the numbers to the ten and to the hundred, and then adjusting. To illustrate, in 58-35, 58 is rounded up to 60, and then 35 is subtracted from 60 to obtain 25. Then the adjustment is made by adding 2 to 25, and 27 is reached. In the application of N10C in 28x4, 30 and 2 are multiplied by 4. Then, 8 is subtracted from 120 to reach 112. When using the same strategy with 116/4, 120 and 4 are divided into 4. Then, 1 is subtracted from 30, and 29 is obtained. The A10 strategy requires to adjust both numbers. For example, in 49+86, 49 is rounded up to 50 and 86 to 85 so as to solve the problem more easily. When using the A10 strategy in 86-28, the operation is adjusted as 88-30. On the other hand in 33÷1 1/2 both numbers are multiplied by two. Number pairs are used in the ND strategy. To illustrate, in 16+18, 18 is separated into 16 and 2. When solving 92-45 with the same strategy, 92 is separated into 45, 45 and 2.

2. Method

2.1. Textbooks Used in the Study

The main sources used in classrooms in Turkey our textbooks published by and under the control of the ministry of education. In this study, the grade 3 mathematics textbook first published in 2018 by the National Education Publications (TR1), the grade 3 mathematics textbook by Doğan and Gezmiş (2018) (TR2), and the grade 4 mathematics textbook by Özçelik (2018) (TR3) were analyzed. All three books were used in Turkish secondary schools during the 2018-2019 school year and were coded as TR1, TR2 and TR3, respectively. In elementary schools in Singapore, four mathematics textbooks are being currently used. These are: My pals are here!, New Syllabus Primary Mathematics, Shaping Maths, Targeting Mathematics. Approximately 60% of Singaporean secondary schools use the book entitled My pals are here! (Yang, Reys & Wu 2010). This study analysed the Singaporean books My pals are here! and Targeting Mathematics. The books were coded as MP and TAR. While Turkish textbooks introduce mental additions and subtractions in grade 1, this takes place in Singapore in grade 3. Mental computations of multiplications and divisions are introduced in Turkish textbooks in grade 4, while Singaporean textbooks introduce mental multiplications in grade 2 and mental divisions in grade 3. In Singapore, mental multiplication is taught in grade 2 via cluster models, followed in future years by the use of greater numbers but similar thinking. In line with these, the analyses included grade 3 and 4 mathematics textbooks from the two countries. As the contents of mental multiplications and divisions that are taught in Turkey only appear in Singaporean textbooks in grade 5, the analyses also included grade 5 Singaporean mathematics textbooks. Schools in both countries use books approved by their respective Education Ministries. Table 1 shows the books analyzed in this study.

Table 1. Turkish and Singaporean Textbooks Analyzed in the Study

Country	Textbooks examined
Singapore	Kheong, F. H., Ramakrishnan, C., Choo, M. (2017). My Pals are Here Maths 3A (Pupil's Book), Mashall Cavendish Education: Singapore. heong, F. H., Soon, G. K., Ramakrishnan, C. (2018). My Pals are Here Maths 4A (Pupil's Book), Mashall Cavendish Education: Singapore. heong, F. H., Soon, G. K., Ramakrishnan, C. (2017). My Pals are Here Maths 5A (Pupil's Book), Mashall Cavendish Education: Singapore. Ming, E. C. C. (2016). Targeting Mathematics 3A, Star Publishing PTE LTD: Singapore. Ming, E. C. C. (2016). Targeting Mathematics 4A, Star Publishing PTE LTD: Singapore. Ming, E. C. C. (2017). Targeting Mathematics 5A, Star Publishing PTE LTD: Singapore.
Turkey	Komisyon (2018). Ortaokul Matematik 3. Sınıf. Devlet Kitapları: Ankara. Doğan ve Gezmiş (2018). Ortaokul Matematik 3. Ada Yayıncılık: Ankara. Özçelik, U. (2018). Ortaokul Matematik 4. Ata Yayıncılık: Ankara.

2.2. Data Collection and Analysis

In the data collection process, two academics from the field of mathematics education with studies on mental computation came together to identify the Turkish and Singaporean textbooks that include mental computation and the parts in these books. Following this, they each separately noted how the topic of mental computation in addition, subtraction, multiplication and division operations was introduced in these books and in how many pages. Regarding the introductions, they examined whether the books introduced the topic with "explicit strategy training" or with "contextual problems" or "by asking students to solve the problem through their unique invented strategies". In the following stage, the textbooks were evaluated with respect to allowing students to use different strategies, to discuss these with their peers, and to identify the best strategy for the mental computation of an addition and subtraction question. The final stage involved the identification of the mental computation strategies used in the textbooks. Data were collected separately by two different academics in the field of mathematics education who previously studied mental computation. Both academics noted the mental computation exercises in textbooks and the strategies used in their solutions on an A4 paper. Textbook contents were analyzed twice by two researchers and full congruence was observed between them.

2.3. Validity and Reliability

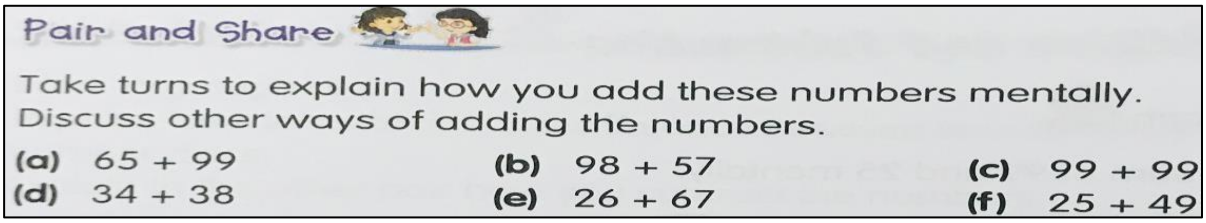
The analyses were performed by two academics in the field of mathematics education who study mental computation. After identifying the sections in textbooks about mental computation, the researchers transferred the mental computation exercises in the books and the strategies used in their solution to a blank sheet. This was done separately by each researcher. For each textbook, the exercise-strategy pairs noted by the two researchers were compared and full agreement was found. In addition, the study included examples on how the mental computation strategies were used in the books. Both Turkish and Singaporean textbooks were analyzed with respect to the information and exercises regarding the use (invention) of different strategies during mental arithmetic operations, discussion of these strategies with peers, identification of the best strategy for a given mental computation, and discussion of these with peers. Textbook content was coded as "direct strategy training existent-nonexistent", "problems/exercises that encourage the use of different strategies existent-nonexistent", "Students are encouraged/not encouraged to discuss the strategies they invented with their peers", "Students are allowed/not allowed to identify and discuss with peers the best mental computation strategy in a given problem". The coding was performed separately by each researcher, and full agreement was found between them. The textbooks also included content encouraging students to use different strategies and discuss their invented strategies with their peers.

3. Findings

This section starts with findings about how textbooks introduce the topics of mental computation in addition and subtraction operations, how the instructional process is implemented and how many pages are allotted in the textbook, followed by the mental computation strategies in addition and subtraction operations. These were supported by examples from the textbooks. Similar steps were followed for the topic of mental computation in multiplication and division operations.

3.1. Findings on "Mental Computation In Additions and Subtractions"

Turkish and Singaporean textbooks introduced the topic of mental computation of additions and subtractions in grade 3. The Turkish book TR1 and the Singaporean book TAR started to teach the mental computation of additions and subtractions by exemplifying the use of direct mental computation strategies. These two books required the students to complete the addition and subtraction exercises at the end of the units by using different strategies (Figure 1).


Pair and Share

Take turns to explain how you add these numbers mentally.
Discuss other ways of adding the numbers.

(a) 65 + 99 (b) 98 + 57 (c) 99 + 99
(d) 34 + 38 (e) 26 + 67 (f) 25 + 49

Figure 1. Exercise at the end of a Unit in Book TAR requiring students to use different strategies (3A, p.44).

Another noteworthy finding was that neither book included contextual problems at the end of units to encourage students to mentally complete the operations by inventing new strategies. In TAR, following explicit strategy training, the students were asked to solve the exercises shown in Figure 1 in different ways and discuss them, whereas in TR1 they were asked at the end of the unit to mentally add in a different way 10, 1, 100, 50, 200 and another number that their teacher will give (TR1, p.75). Different from the other two books, the Turkish book TR2 and the Singaporean book MP did not introduce the topic directly with strategy training, but the students were asked to solve a contextual problem (Figure 2) by inventing new strategies. This was followed by strategy training. At the end of the unit, the students were given several exercises to solve by using new strategies. MP and TR2 allocated six pages to the topic, and TR1 seven pages. In TAR, the total number of books allocated to the topic was three.

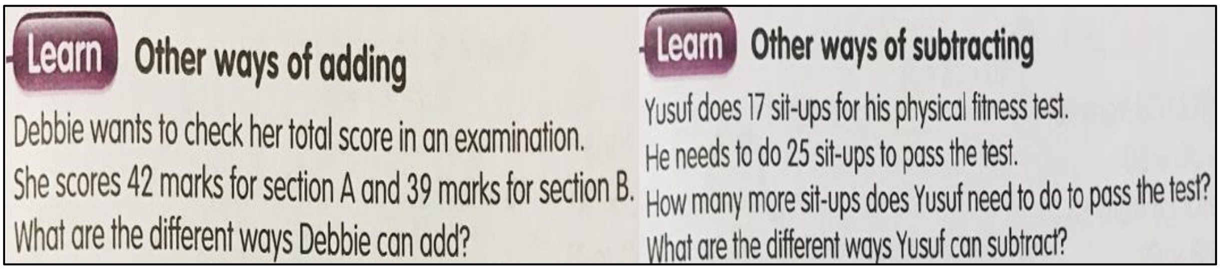


Figure 2. The contextual problem used in MP for mental addition and subtraction (3A, p.43 and 69)

The book MP started the topic of mental computation of addition with the following contextual problem: “Debbie wants to check her total score in an examination. She scores 42 points for section A and 39 points for section B. What are the different ways Debbie can compute her total score?” A similar contextual problem was also used for subtraction. In the Turkish book TR2, in order to allow students to invent strategies before explicit strategy training, the topic was introduced with a problem “Class 3/A in our school was given 28 cartons of milk, while class 3/B was given 32 cartons. Can you mentally compute how many cartons of milk were distributed in classes 3/A and 3/B? Discuss” (TR2, p.67). As can be seen, in books TR2 and MP, the mental computation of additions and subtractions was taught in the following order: “students’ solving contextual problems by using their unique strategies”, “strategy training”, “solving different exercises mentally by using new strategies”. TR1 and TAR introduced the topic with explicit strategy training, and then got students to mentally compute various exercises by using different strategies. Although all books expect students to use different strategies when mentally computing additions and subtractions, they do not contain any content to encourage students to identify the best strategy among those that they have invented for mental computations or discuss it with their friends. The mental computation strategies used in the books about additions and subtractions are shown in Table 3.

Table 3. Mental Computation Strategies Used in Additions and Subtractions

Strategy	Addition				Subtraction			
	TR1	TR2	TAR	MP	TR1	TR2	TAR	MP
COB		x			x			
1010	x	x		x				x
N10	x	x		x			x	x
10N		x			x	x	x	
10s								
SC								x
M5,10,100			x	x			x	x
N10C			x	x	x	x		x
A10								
ND	x							
GCN								

In the books other than the Singaporean book TAR, the strategies 1010 and N10 were used to exemplify how to mentally perform an addition. Different from other textbooks, TR1 exemplified the use of the ND strategy, and TR2 exemplified the use of the strategies COB and 10N. Figures 3 and 4 offer examples of strategies used in the mental computation of additions in TR1.

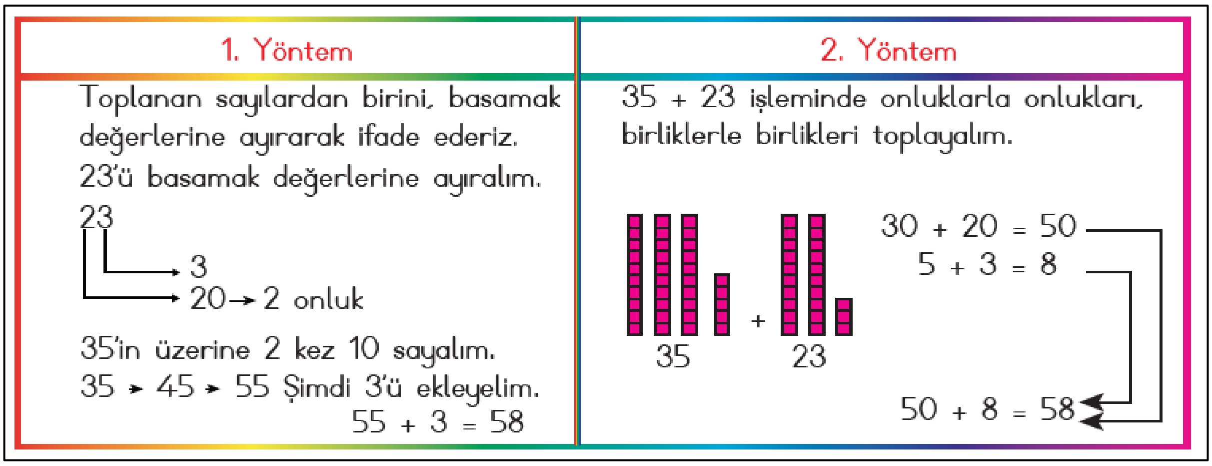


Figure 3. Strategies N10 and 1010 used in additions in the book TR1 (p.73).

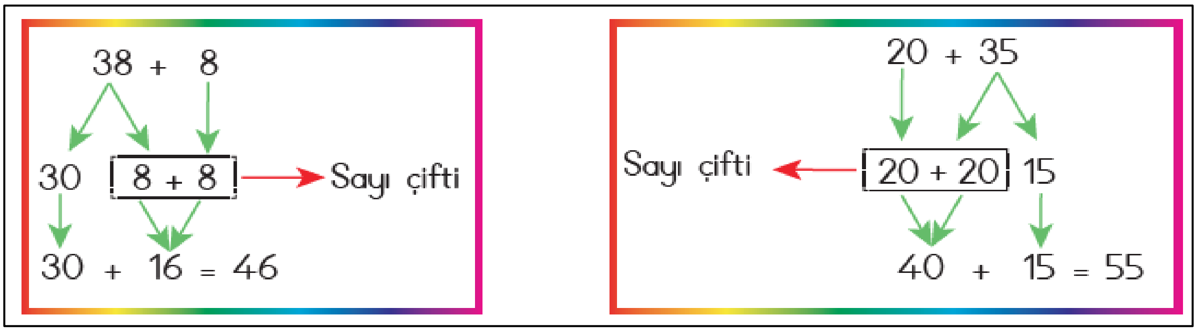


Figure 4. Strategy ND used in additions in the book TR1 (p.73).

As shown in Figure 3, 35+23 was mentally solved in the book TR1 first by using the N10 strategy. Here, 23 was separated into its tens and units, after which 35 and 20 were added and, finally, 3 was added to the sum. In the second solution in the book, both numbers were separated into its tens and units, followed by the addition of tens (30 and 20) and units (5 and 3) within themselves. Then, 50 and 8 were added, and the sum 58 was reached. Figure 4 exemplifies the use of the number pairs strategy, which is not introduced in any of the other books. In the operation 20+35, 35 was separated into 20 and 15; the 20s were added; and then 15 was added to 40 to reach 55. Figure 5 presents how the strategies 10N and COB, nonexistent in any of the other books, were included in TR2 for the mental computation of additions.

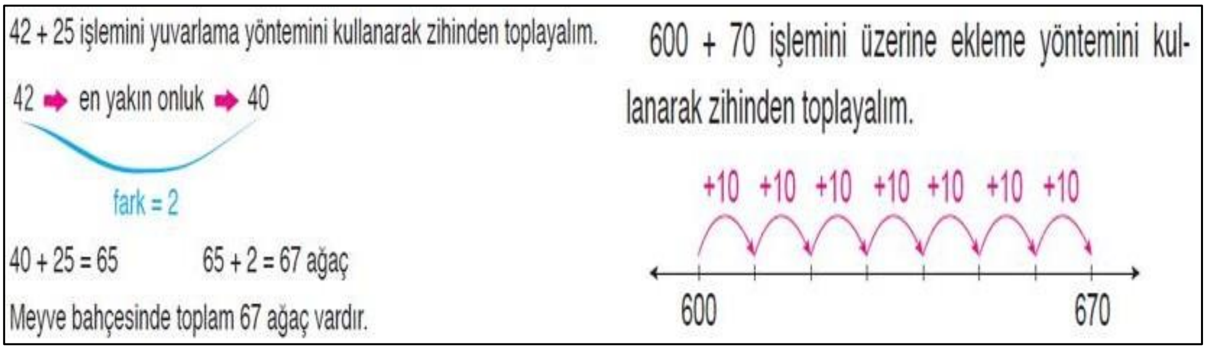


Figure 5. Strategies 10N and COB Used in Addition in Book TR2 (pp.68-69).

Figure 5 shows that book TR2 mentally solved 42+25 by separating 42 into 40 and 2, followed by adding 40 and 25 to reach 65, and adding 2 thus reaching the sum of 67. In this strategy, in contrast to N10, the first number, which is 42, is separated into the tens and units. In TR2, the operation 600+70 was solved by adding 7 times 10 to 600. In addition to strategies 1010 and N10 (MP, 3A, p.43), Singaporean books included the strategies M5,10,100 and N10C, which are nonexistent in Turkish books, to teach the topic of mental computation of additions. In the Singaporean book TAR, the mental computation of addition was performed by only using the strategies M5,10,100 and N10C (3A, p.43). Figure 6 presents examples regarding the use of strategies M5,10,100 and N10C from the book MP.

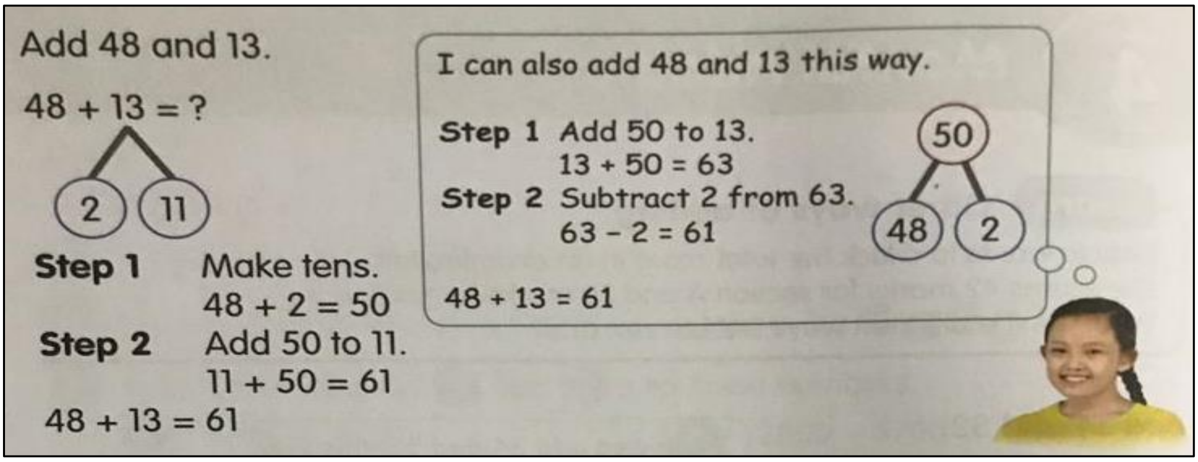


Figure 6. Strategies M5,10,100 and N10C Used in the Book MP for the Solution of Additions (3A, p.44).

In book MP, strategy M5,10,100 was used to separate 13 into 11 and 2, thus adding 48 and 2 to reach 50, which is a multiple of 10. Then, 50 and 11 were added to reach 61. In the same book, 48 was rounded to 50, followed by the addition of 50 and 13 to reach 63, and finally subtracting the initially added 2 from 63 and reaching the sum of 61. The book MP included examples of trying to reach a multiple of 10, as well as those trying to reach 100. For instance, during the mental computation of 86+95, 86 was first separated into 81 and 5, followed by the addition of 95 and 5 to reach 100, and finally 100 and 85 were added to reach the sum of 185.

When the books were analyzed with respect to the mental computation strategies they included for subtractions, it was found that Turkish books introduced the strategies 10N and N10C. In addition to these strategies, book TR1 included the COB strategy. Among Singaporean books, TAR included the strategies N10, 10N and M5,10,100, while book MP included 1010, N10, M5,10,100 and N10C. It is worth noting that strategy 1010 was only included in book MP, while strategies N10 and M10-100 only appeared in Singaporean books. Book TAR did not mention strategy N10C, which appeared in all other three books. Figure 7 presents examples of content from books TR1 and TR2.

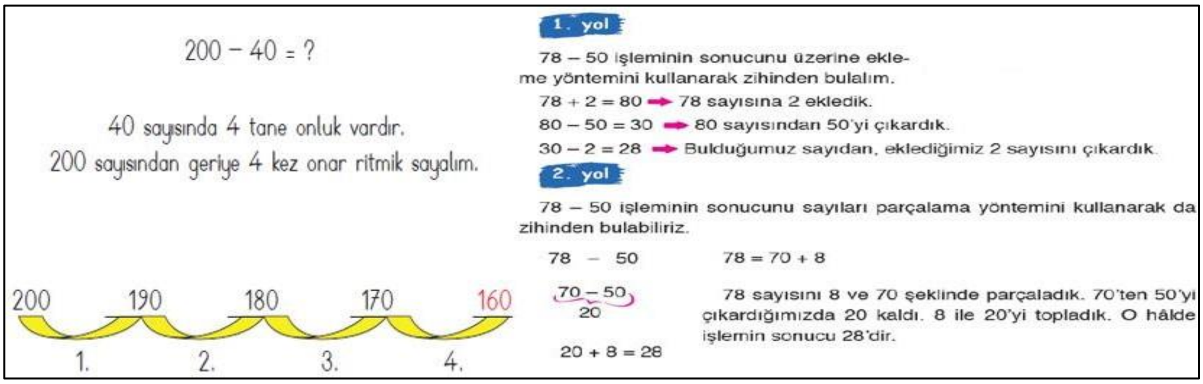


Figure 7. The COB Strategy in Book TR1 (p.63), and Strategies N10C and 10N in Book TR2 (p.57).

As shown in Figure 7, the book TR2 firstly used the N10C strategy in the mental computation of 78-50. The number 78 was rounded up to 80, followed by the subtraction of 50 from 80 to reach 30, and the subtraction of the initial 2 from 30, and finally reaching 28. The second strategy in the mental computation of the same problem was 10N. In this strategy, 78 was first separated into 70 and 8, followed by the subtraction of 50 from 70, thus reaching 20, and finally adding 20 with 8 to reach 28. These two strategies were used in the book TR1 (pp.62-63). TR1 included strategy COB in the mental computation of subtractions, which did not appear in the other three books. In the Turkish book TR1, the sum of 200-40 was obtained by considering that there are 4 tens in 40, and therefore counting back from 200 four times by ten. Other books did not include examples of mentally computing subtractions with the strategy of counting back rhythmically. It is worth noting that book TAR does not include the strategy N10C which appears in other books, and MP does not include the strategy 10N. Only book MP included strategy 1010. Also, strategies N10 and M5,10,100 which did not appear in Turkish books, were included in both Singaporean books. Figure 8 shows the strategies used in the Singaporean books TAR and MP for the mental computation of subtraction.

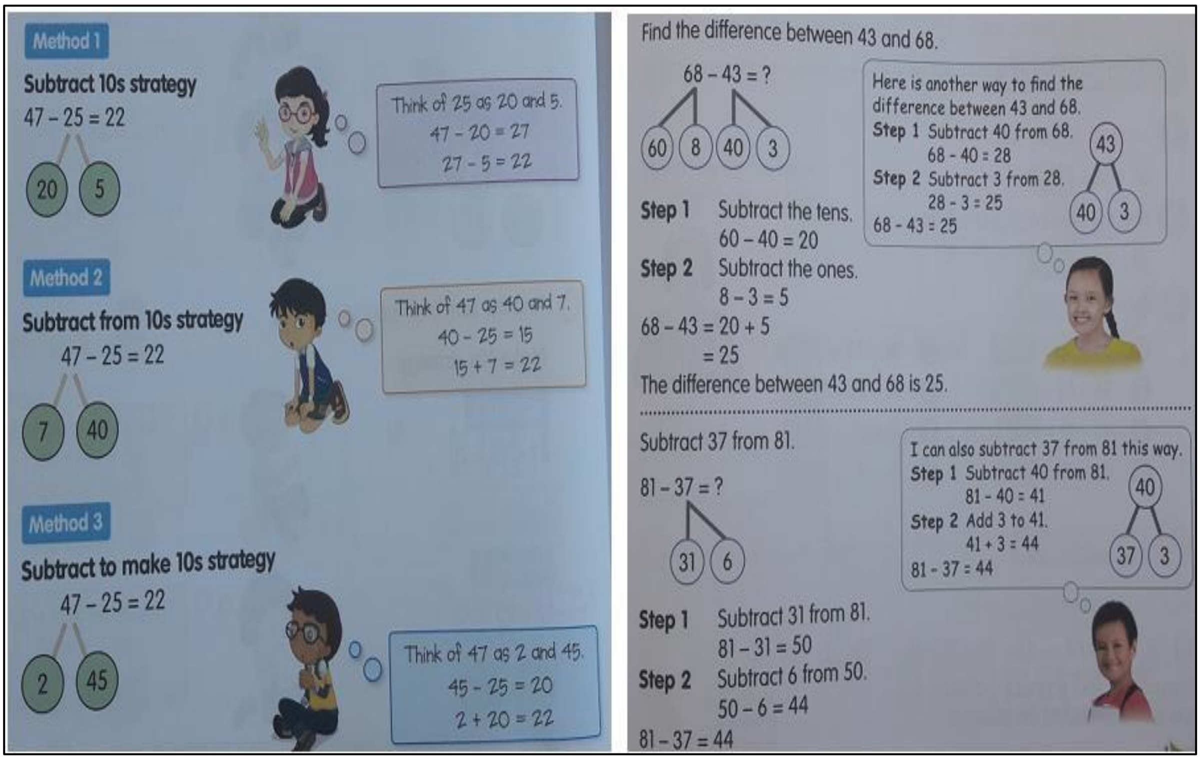


Figure 8. Strategies N10, 10N, M5,10,100 in TAR (3A, p.44); 1010, N10, M10-100, N10C in MP (3A, p.69)

Figure 8 exemplifies three different strategies to be used in the mental computation of 47-25 in book TAR. The first strategy used in the book was N10. In this strategy, 25 was separated into its tens and units, namely 20 and 5, and then the sum of 22 was found by subtracting 20 and 5 respectively from 47. The other strategy used was 10N. Here, 47 was separated into its tens and units, then 25 was subtracted from 40 to reach 15, following which 15 and 7 were added to find 22. In strategy M5,10,100 used in the book, 47 was separated into 45 and 2. In this way, 25 was subtracted from 45, and the number 20, a multiple of 10, was found. Then, 20 and 2 were added to reach 22. In the Singaporean book MP, 68-43 was mentally computed by using strategy 1010. The numbers 68 and 43 were separated into their tens and units, and then these tens and units were subtracted among themselves. The resulting 20 and 3 were added, and the sum of 23 was found. The same operation was also computed by using strategy N10. Here, 43 was separated into 40 and 3. Then, 40 was subtracted from 68, and 28 was reached. Finally 3 was subtracted from 28 and the sum of 25 was found. The second question in the book exemplified how to mentally subtract 37 from 81. The Singaporean book MP also exemplified the use of strategy N10 in the mental computation of 90-38 (Figure 9). In line with the strategy, 38 was first separated into 30 and 8, and then 30 was subtracted from 90 to reach 60. In the next step, 8 was subtracted from 60 and the sum of 52 was reached. The same book used a method for 90-38, which was named "shortcut" and was not featured in any of the other books. This strategy required for separation that a number that is closest to but greater than the separated number, and is also a multiple of 10, would be used. Therefore, in 90-38, first 90 was separated into 40 and 50, then subtracting 38 from 40 to reach 2, and finally adding 50 and 2 to reach the sum of 52.

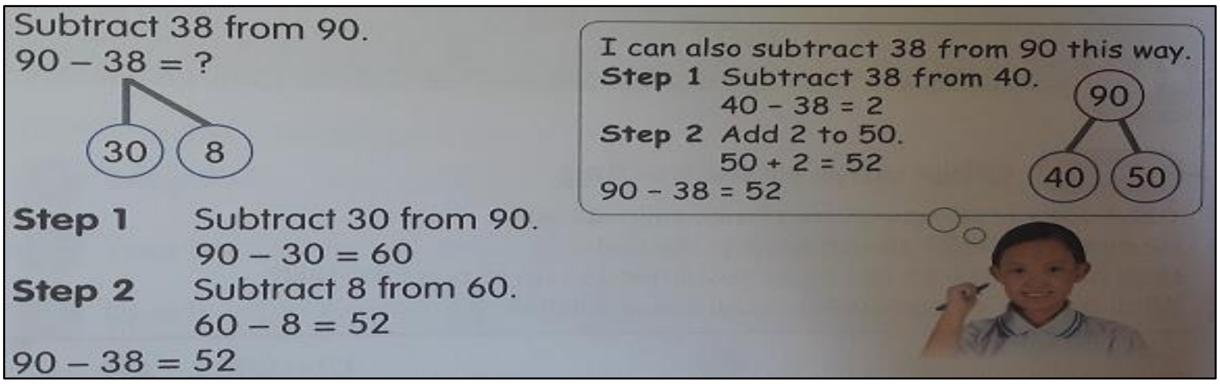


Figure 9. Strategy N10 Used in Book MP for Subtractions (3A, p.70).

3.2. Findings on "Mental Computation in Multiplications and Divisions"

Singaporean textbooks introduced the mental computation of multiplications in grade 2, and that of divisions in grade 3. Turkish textbooks, on the other hand, mentioned strategies for mental computation of multiplications and divisions in grade 4. No Singaporean or Turkish book expected students to mentally compute multiplications or divisions by giving a contextual problem. In contrast, Singaporean textbooks taught mental multiplication and division strategies by using cluster models and tokens. In contrast to Singaporean books, Turkish ones preferred rule-based strategy training, as can be seen in the examples below (Figure 11). The Singaporean books MP and TAR expected students to use different strategies in multiplications and divisions at the end of the units, as shown in Figure 10. Turkish books did not include exercises that encourage students to mentally multiply or divide by inventing new strategies at the end of units.

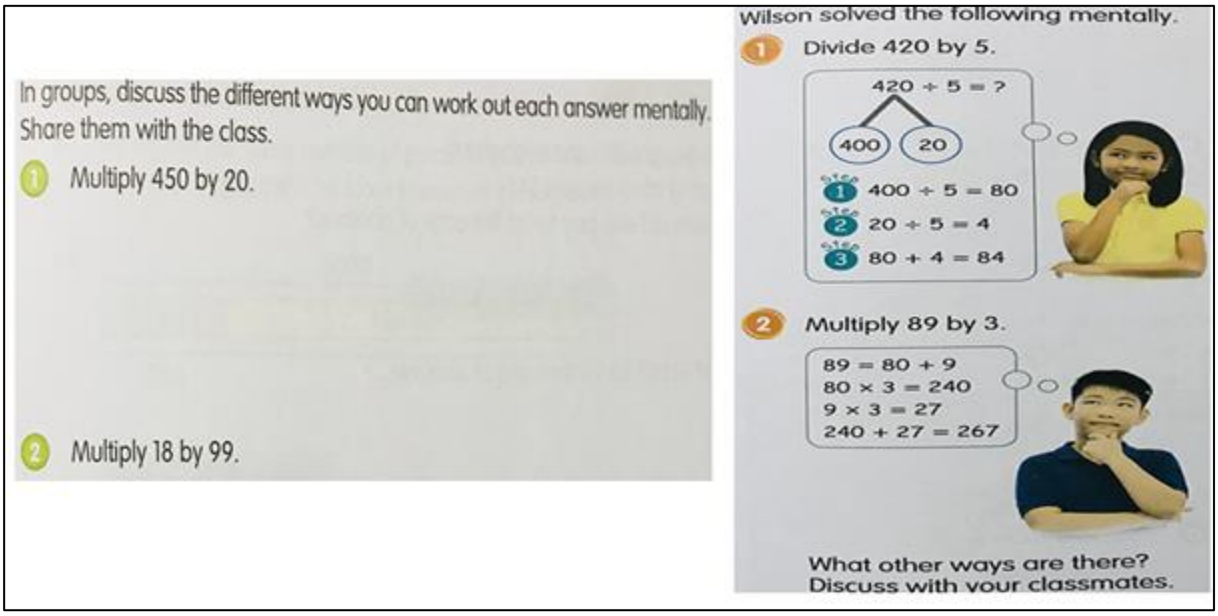


Figure 10. Contents from Books TAR and MP, Which Encourage Students to Use and Discuss with Peers Different Strategies in the Mental Computation of Multiplications (TAR 4A, p. 65; MP 4A, p. 71).

Book TAR asks students to mentally solve 450x20, 18x99 and 6480x8 by discussing with group mates and inventing new strategies. Book MP, on the other hand, exemplifies the use of strategy N10 in the operations 420:5 and 89x3. Below are the mental computation strategies used for multiplications and divisions in Turkish and Singaporean textbooks, as well as quotations from textbooks.

Table 4. The Mental Computation Strategies Used in Textbooks in Multiplications and Divisions

Strateji	Çarpma İşlemi			Bölme İşlemi		
	TR3	TAR	MP	TR3	TAR	MP
COB						
1010						
N10C		x	x			
N10		x	x		x	x
10^n	x	x	x	x	x	x
GCN						

In Singaporean books, the mental computation of multiplications involved the use of strategies N10, N10C and 10^n while that of divisions involved N10 and 10^n. They used cluster models and tokens to teach these strategies. The Turkish book TR3 only mentioned how to mentally multiply or divide a number by the exponents of 10 when teaching mental multiplication and division, and did not include strategies such as N10 or N10C. The Turkish book TR3 mentions that when a number is being multiplied by 10, 100 or 1000 respectively, 1, 2 or 3 zeros must be written to the right of the natural number. Figure 11 shows how the Singaporean book MP teaches strategies N10 and N10C, and how TR3 teaches the mental multiplication of a number by 10.

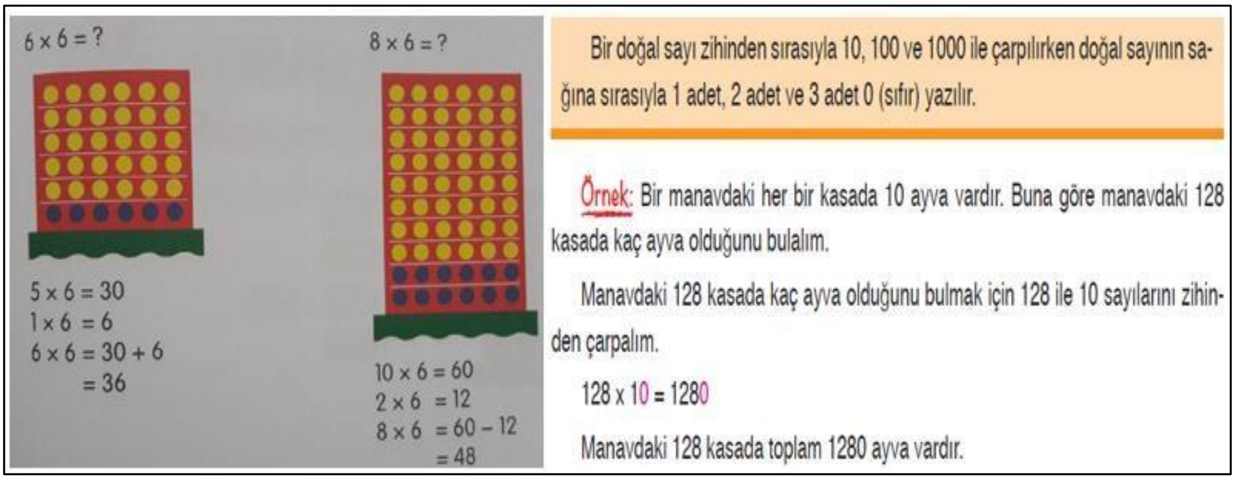


Figure 11. Multiplication Strategies from Books MP and TR3 (MP, 3A, p.85; TR3, p.82)

Figure 11 shows how the grade 3 mathematics textbook MP solves 6x6 by using the separation strategy. In line with strategy N10, 6x6 was written as (5+1)x6 and the visual of this symbolic representation was given. This was done to help students grasp the meaning of separation strategy. Similar examples can be found in the Singaporean book TAR as well (TAR 3A, pp.68-69). The Turkish book TR3 states that when a number is being multiplied by 10, 100 or 1000 respectively, 1, 2 or 3 zeros must be written to the right of the natural number. Therefore, book TR3 expects students to use the given rule as they perform the mental multiplication operation. While multiplication via the exponents of 10 is taught in grade 4 in Turkey, it is taught one year later in grade 5 in Singapore. Instead of giving the rule directly as in Turkish textbooks, Singaporean books made use of visual models to help students discover the rule by working out a pattern. The related content is shown in Figure 12.

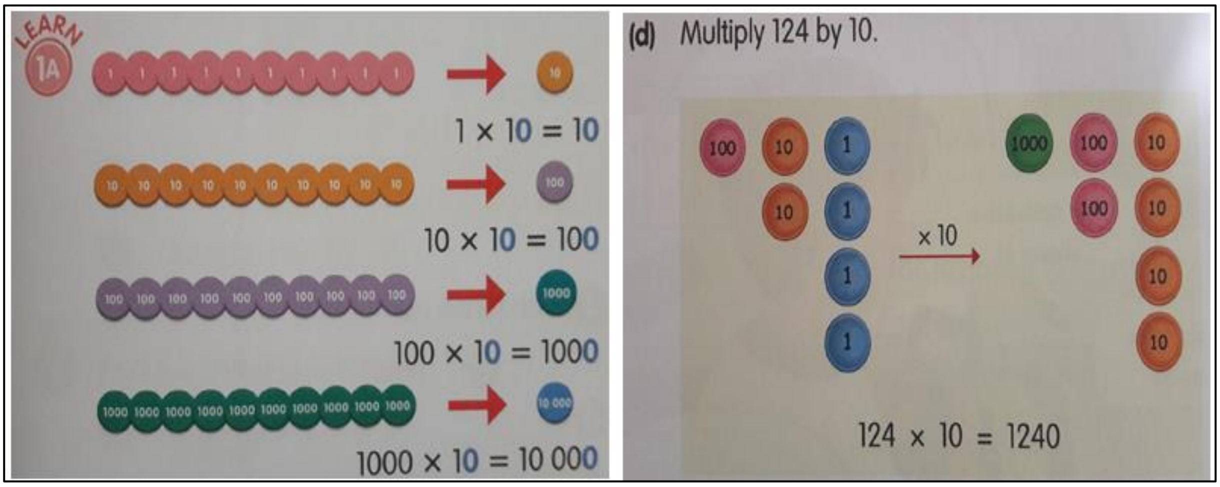


Figure 12. The model concerning the multiplication of a number by 10 (MP, 5A, p.17, TAR, 5A, p.14).

The visual elements used in book MP emphasize the repeated addition meaning of multiplication. The book expects students to discover the pattern and the rule. Underneath this visual, operations such as 4538x10, 500x100 are modelled with tokens, asking the students "Can you see the pattern in the model", thus expecting them to discover the rule of mental multiplication with exponents of 10. In book TAR, the number to be multiplied by 10 is separated into parts, and the sum is found by multiplying each part by 10 (N10). In Singaporean textbooks, the use of strategy N10 in the mental computation of divisions has been modelled with tokens and various tools. An example of using N10 in the Singaporean book MP can be seen in Figure 13.

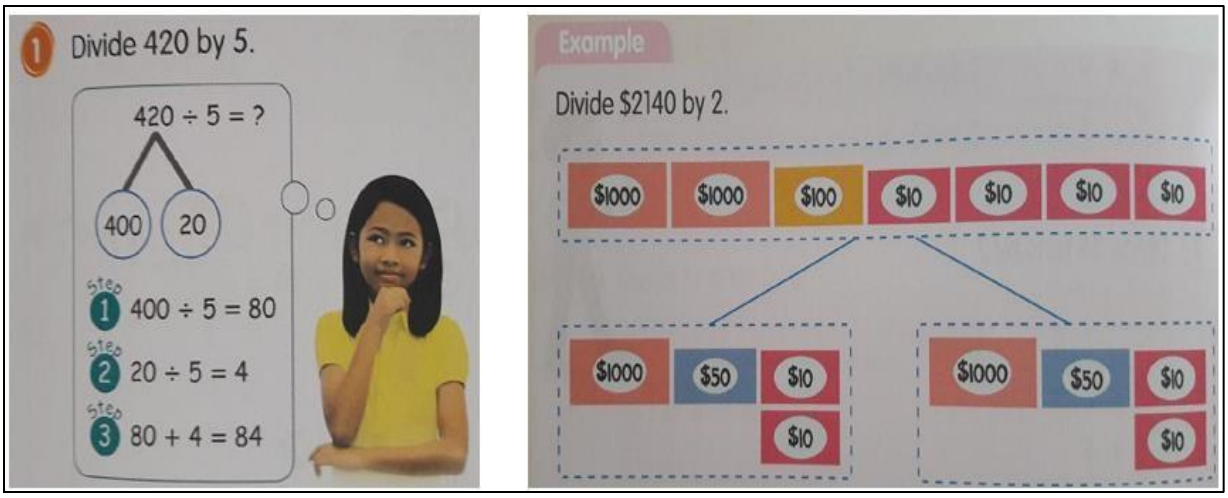


Figure 13. Strategy PA in Books MP and TAR (MP, 4A, p.71; TAR, 4A, p.64)

The grade 4 mathematics textbook MP shows how the operation 420:5 can be performed by using the strategy N10. First, 420 is separated into 400 and 20, then dividing these numbers by 5, and then adding 4 to the resulting 80, finally reaching the sum of 84. The book TAR also includes the use of the strategy N10 to divide numbers. The grade 4 mathematics textbook TAR shows how the solution to 2140:2 may be obtained by the separation strategy. First, the number 2140 was separated into 1000, 1000, 100, 10, 10,10, 10, then dividing these numbers by 2, respectively. The Turkish textbook mentioned how to mentally divide a number into the exponents of 10 simply by giving a rule. It stated that when a number is being divided by the exponents of 10, the same number of zeros in the denominator must be deleted from the number. Therefore, similar to the teaching of mental multiplication, Turkish textbooks taught how to mentally divide also by giving a direct rule. In contrast, the Singaporean book MP made use of visual elements instead of giving the rule directly, and aimed to enable students to discover the pattern and the rule. In book TAR, as is the case in multiplications, the number to be divided by an exponent of 10 is first separated into parts, and then each part is divided by the relevant number (TAR, 5A, p.21-24). Figure 14 presents examples from the books.

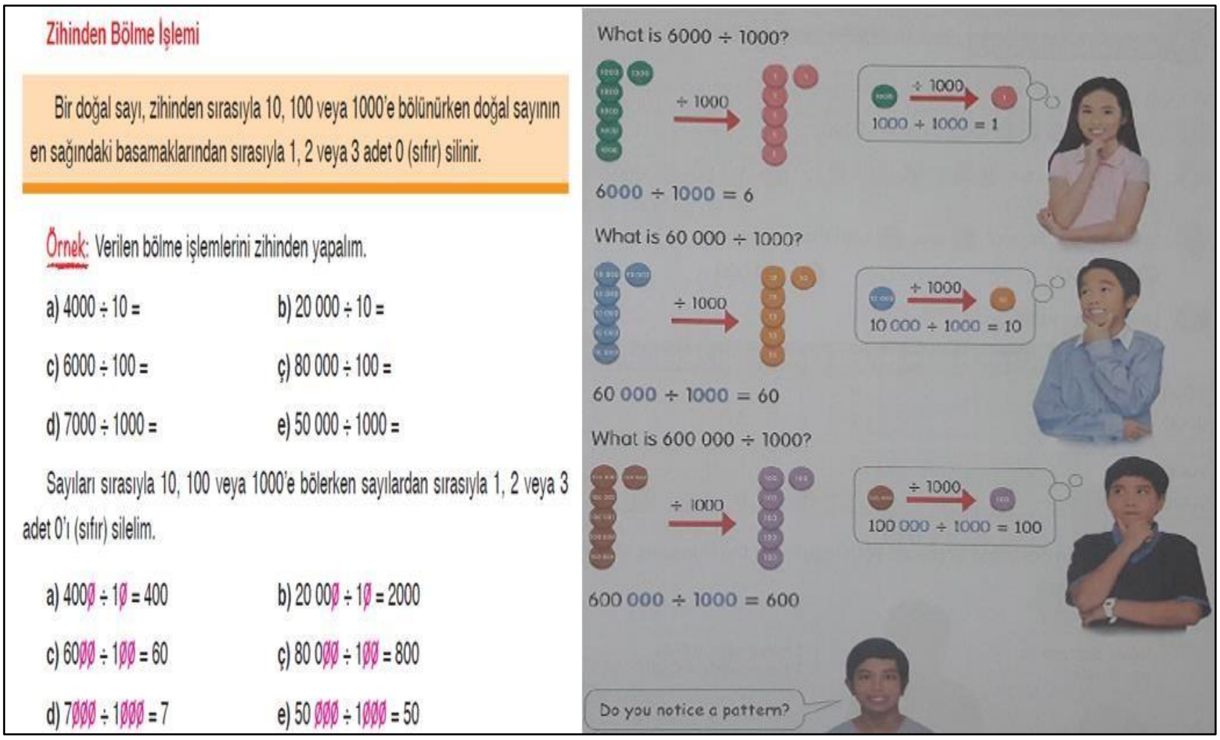


Figure 14. Shortcut Division of a Number by an Exponent of 10 in Book TR3 (TR, p.97). The Model Regarding the Division of a Number by an Exponent of 10 in Book MP (MP, 5A, p.31).

4. Discussion, Conclusion and Suggestions

This study compared Turkish and Singaporean textbooks with respect to the contents of the topic of mental computation strategies in arithmetic operations. Grade 3 textbooks from both countries included the topic of mental computation of additions and subtractions. All books allocated 3 pages to this topic. The Turkish book TR1 and the Singaporean book TAR introduced the topic directly with strategy training. In contrast, the Turkish book TR2 and the Singaporean book MP started the topic with a contextual problem, asking the students to solve it by inventing different strategies. There are two views in the literature on the teaching of mental computation strategies. The first one advocates the direct teaching of mental computation strategies due to the differences between students' previous experiences and knowledge. Cooper, Heirdsfield and Irons (1996) argue that students with weak mental computation skills should be identified and be directly taught mental computation strategies. Klein, Beishuizen and Treffers (1998) state that students who are deficient in solving additions and subtractions need teacher support when using mental computation strategies in the problems. On the other hand, those who advocate the second view on the teaching of mental computation strategies point out the need for students to use their previous knowledge (number patterns, the decimal number system, etc.) and invent their own strategies mental computation, instead of being explicitly taught strategies. According to Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema and Empson (1998), explicit teaching of mental computation strategies poses the risk of students using these strategies as a mechanical rule. Therefore, encouraging students to discuss the mental computation strategies they use and to think about the best strategies for a given problem may help them develop more effective solution strategies (Yang & Huang, 2013). Despite the clear rationale of these two arguments, the topic of mental computation may be introduced in textbooks through contextual problems rather than explicit strategy training, as is the case in books TR2 and MP. In this way, the students who are unable to invent mental computation strategies and their reasons for this may be identified so that measures can be taken. In books TR1 and TAR, which use explicit strategy training, students are given addition and subtraction operations at the end of units and they are asked to mentally solve them by using different strategies. However, using this exercise not at the beginning of a unit, but at the end of it after strategy training may prevent students from inventing new strategies. Indeed, Blote, Klein and Beishuizen (2000) taught students to first use strategy N10 and then 1010 in the mental computation of additions and subtractions in their study. While students only used strategy N10 at the beginning, they tended to prefer 1010 after learning about it. These results reveal that the classroom context is a factor that influences students' strategy preferences. Similar results were also obtained in studies conducted in Turkey (Duran, Doruk & Kaplan, 2016; Güç & Karadeniz, 2016).

The book TR1 mentioned three strategies in the mental computation of additions (1010, N10, ND), while the book TR2 mentioned four strategies (COB, 1010, N10, 10N). All of the Turkish books included strategies 1010 and N10 for additions. In mental addition and subtraction operations, students frequently use strategies 1010 and N10 (Varol & Farran, 2007). Murphy (2004), at the onset of his study, aimed to identify the mental computation strategies used by students. He found that students only used strategies 1010 and COB when mentally computing additions and subtractions (Buzeika, 1999). Strategies 1010 and N10 have only been taught for the mental computation of additions in the Singaporean book MP. Other than these, strategies M5,10,100 and N10C, which did not feature in Turkish textbooks for the mental computation of additions, were included in Singaporean textbooks with examples. In strategies M5,10,100, unlike in 1010, N10 and 10N, one of the added numbers is separated to obtain multiples of 5, 10 and 100. In strategy N10C, one of the added numbers is brought up to 10 or 100 and then the sum is adjusted properly. For instance while computing 86+95 in strategies M5,10,100, the number 86 is written as 81+5 in order to bring 95 up to a hundred. When the same operation is computed by using strategy N10C, 95 is considered to be 100; then 100 and 86 are added to obtain 186; and then 5 is subtracted from 186 to obtain 181. In this way, in the process of mental addition, students will discover the ease of adding with 10 and 100 and gain experience in writing a number as the sum of the appropriate number pair and adjusting numbers. Students who gain experience in properly adjusting numbers during mental additions will be able to reach the solution in questions like 128+86=83+?, by adjusting numbers instead of solving the equation through long steps (86 is 3 more than 83, then the sum should be 3 less than 128, which is 125). To sum up, it could be argued that book MP is the richest source for its diversity of strategies in the mental computation of additions. Including strategies M5,10,100 and N10C in Turkish textbooks in the mental computation of additions would enable teachers to learn about this strategy and encourage their students to use different mental computation strategies. Indeed, the mental computation strategies included in the textbooks and are known by the teachers are also used frequently by students. As American students are taught how to use strategy 1010 in additions from an early age, they prefer to use it in mental additions (Blote, Klein & Beishuizen, 2000; Heirdsfield & Cooper, 2004). Similarly, Duran, Doruk and Kaplan (2016) found that Turkish students most frequently used strategies COB and 1010 in additions, and they least used M5,10,100.

Regarding mental subtractions, book TR1 exemplified the use of three strategies (COB, 10N, N10C), while TR2 exemplified the use of two (10N, N10C). The Singaporean book TAR included the use of strategies N10, 10N and M5-10-100 in mental subtractions, while book MP included strategies 1010, N10, SC, M5-10-100 and N10C. In sum, as in additions, the richest book with respect to the diversity of mental computation strategies in subtractions was also book MP. As in additions, strategy M5-10-100 was only included in Singaporean books. The use of strategy SC was only mentioned in book MP. Strategy SC is an effective one for the mental computation of subtractions and significantly minimizes the risk of error. For instance, in operation 74-28, when the number 74 is separated in order to obtain the ten that is closest to28 and that is greater than 28, the separated parts will be 44 and 30. Then 2 will be subtracted from 30 to obtain 2, and then 2 will be added to 44 to reach the sum of 46. Another strategy that appeared in Singaporean books but not in Turkish ones was strategy N10. In European countries, strategy N10 is preferred for the mental computation of subtractions as the use of this strategy is expected to decrease students' risk of error (Heirdsfield & Cooper, 2004; Klein & Beishuizen, 1994). Blote, Klein and Beishuizen (2000) taught how to use strategies 1010 and N10 in the mental computation of additions and subtractions to Dutch second graders, and found that they preferred strategy N10. Therefore, the inclusion of this strategy in Turkish textbooks may be useful.

Singaporean elementary mathematics textbooks introduced the mental computation of multiplications in grade 2, while Turkish textbooks (TR3) introduced it in grade 4. Therefore, it may be stated that Turkish elementary school students are informed about the mental computation of multiplications two years after Singaporean students. Other than this important finding, the Turkish textbook only included rules and examples about how to multiply a number by the multiples of 10. In the Turkish book, the mental computation of multiplications involves multiplying a number by 10, 100, 1000, by adding 1, 2, 3 zeros to its right side, respectively. This strategy may cause students to make mistakes when multiplying a number such as 1 or 2 by 100 in future years. Singaporean books introduced strategies N10 and N10C in the mental computation of multiplications in grade 2, and the strategies for multiplying and dividing a number by the multiples of 10 in grade 5. In addition, strategies N10 and N10C were taught by using cluster models. In sum, Turkish students learn mental multiplication two years later than Singaporean students, and do not have the chance to use different mental computation strategies based on the conceptual meaning of multiplication. In addition, the rule in Turkish books about how to quickly multiply a number by the multiples of 10 may also be regarded as a deficiency. Indeed, Singaporean books mentioned the repeated addition meaning of multiplication when multiplying a number with the multiples of 10, and the numbers were separated, followed by the multiplication of each part by the multiples of 10. The students were then asked to discover the emerging pattern. More precisely, while the Turkish textbook gave explicit rules, Singaporean books expect students to discover them.

As was the case with multiplications, the Turkish mathematics book for 4th grades TR also taught the mental computation of divisions only by giving a rule about how to divide a number quickly by the multiples of 10. In books MP and TAR, the use of strategy N10 in the mental computation of divisions was explained through examples. Other than this, 5th grade Singaporean books made use of visual elements in teaching how to mentally divide a number into the multiples of 10, and aimed to make the students discover the pattern and thus the rule, instead of explicitly teaching the rule. In book TAR, as in multiplications, the number to be divided by a multiple of 10 was first separated into parts and the sum was reached by dividing each part by the relevant number. Whether students will be able to mentally compute multiplications and divisions in secondary school depends on them mastering conceptual strategies such as N10 and N10C in elementary school, inventing new strategies, and discussing these with their peers. It may be argued that Singaporean textbooks offer students more learning opportunities than the Turkish textbook TR3. In line with these findings, it may be recommended that textbooks are equipped with practices to help students invent mental computation strategies (contextual problems, length, area, cluster models, etc.), and that students are encouraged to identify the best strategy for different multiplication and division operations. In this way, students will be able to learn mental computation strategies and decide on the best strategy to be used in the mental computation of multiplications and divisions.

All books expect students to use different strategies when mentally carrying out arithmetic operations. However, none contains any content to encourage students to identify the best strategy among those that they have invented for mental computations or discuss it with their friends. Including questions in textbooks such as "What strategy would you choose to use when mentally answering this question? Why did you choose it? Explain your reasons and discuss with your friends." may help students to evaluate their strategies and question whether the mental computation may benefit from the use of other strategies. Indeed, previous studies have shown that students choose their strategies by disregarding the numbers in the operation (Güç & Karadeniz, 2016; Torbeys & Verschaffel, 2016; Duran, Doruk & Kaplan, 2016). To illustrate, the use of strategy N10C in the mental computation of 457-298 is more effective than others. With this strategy, students can reach the result faster and more accurately (457-300=157, 157+2=159) (Torbeys & Verschaffel, 2016). Textbooks should therefore be enriched with regard to mental computation strategies, and include information on what strategy would be best in the mental computation of arithmetic operations involving different numbers. This might help students learn mental computation strategies and decide on the best strategy to be used in the mental computation of arithmetic operations.

Overall, Singaporean books may be said to offer students more learning opportunities in the mental computation of arithmetic operations. These results suggest that Singaporean students may perform better than their Turkish counterparts in international exams in future years as well (in the numbers and operations learning domain). However, caution needs to be exercised when generalizing the results of the present study. Considering teachers' role in the instructional process (Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen & Doorman, 2015; Yang, 2018), even textbooks with perfect content may not be enough for effective mathematics instruction. There are many other factors affecting students' mathematics achievement (parents' education level, the number of educational materials at home, teacher roles, etc.). A well-prepared or not-so-well-prepared book can both find life in the hands of a well-equipped teacher. Considering this, future studies may concern themselves with how teachers use the textbook, how they introduce the topic and what exercises they use when teaching mental computation.

Türk ve Singapur Matematik Ders Kitaplarının Zihinden Hesaplama Konusunda Kullanılan Stratejiler Açısından Karşılaştırılması

1. Giriş

Matematik öğretim programına müfredatına zihinden hesabın dahil edilmesi, sayı hissinin gelişimini desteklemenin bir yolu olarak düşünülebilir (McIntosh, 1998). Ulusal matematik öğretmenleri konseyinin ilke ve standartları içerisinde ilköğretim öğrencilerinin sayı hissi becerisinin geliştirilmesi gerektiği vurgulanmaktadır. Sayı hissi öğrencilerin sayıları tanımasını, sayılar arasındaki ilişkileri bilmesini, problem çözümlerinde esnek ve pratik çözüm stratejilerini (zihinden hesap ve tahmin) kullanmasını gerektirmektedir (Reys, 1994; Sowder, 1992; Yang, Hsu ve Huang, 2004). Ulusal matematik öğretmenleri konseyi sayı hissinin 6 boyutuna işaret etmektedir. Bu boyutlar, "sayıları uygun şekilde ayrıştırma", "100 ve 1/2 gibi referans sayılarını kullanma", "10 tabanlı sayı sistemini bilme", "tahmin etme", "problemleri çözmek için aritmetik işlemler arasındaki ilişkileri kullanma", "sayıların büyüklüğünü kavrama" şeklinde ifade edilebilir (NCTM, 2000, s.32). McIntosh, Reys ve Reys (1997), sayı hissinin, zihinden hesap ve tahminin her ikisini de içerdiğini ve birbirlerinden bağımsız düşünülemeyeceğini vurgulamışlardır (s.323). Zihinden hesaplama, kağıt kalem veya hesap makinesi gibi araç gereçler kullanmadan, bir işlemin sonucunu doğru olarak bulma eylemidir (Reys, Reys ve Hope, 1993). Öğrenciler günlük hayatta karşılaştıkları problemleri pratik ve kolay bir şekilde zihinden çözebilmelidirler. Maclellan (2001), öğrencilerin problem çözerken mekanik kurallara bağlı kalmalarının gittikleri adımları düşünmelerini ve sorgulamalarını engellediğini ifade etmiştir. Tersine, zihinden hesap yaparken öğrenciler, sayılar arasındaki ilişkiler üzerinde sürekli düşünmektedirler. Öğrencilerin kullandıkları düşünme stratejileri, sayılar arasındaki ilişkileri, işlemlerin anlamlarını, işlemler arasındaki ilişkileri ve basamaklı sayı sisteminin yapısını kavramsal olarak öğrenip öğrenmedikleri ile ilgili bilgi sağlamaktadır (McIntosh, Reys ve Reys, 1997). Örneğin, bir ilkokul öğrencisi kırtasiyeden tanesi 19 lira olan iki kalem aldığında ödeyeceği para miktarının ne olduğunu, 20x2=40,2x1=2,40-2=38 işlem adımlarını takip ederek zihinden bulabilir (Yang ve Huang, 2013). Çoğu öğrenci, aritmetik işlemleri yaparken, sayıları alt alta yazarak, sonuca ulaşma eğilimindedir. Çünkü bu şekilde işlemin çözümünün öğrenilmesi kolay olmakla birlikte bu stratejide öğrenciler muhakeme yapmadan doğrudan prosedürleri uygulamaktadırlar (Heirdsfield ve Cooper, 2004a). Dolayısıyla öğrencilerin alt alta işlemleri yaparak doğru sonuca ulaşmaları, başarının tek göstergesi olarak düşünülmemelidir (Reys ve Yang, 1998). Örneğin, 39x7 işlemini yapmak başlangıçta zor görülebilir ancak çarpma işleminin anlamını kavramsal olarak öğrenmiş ve sayılar arasındaki ilişkileri kurabilen bir öğrenci, 40 ile 7'yi çarptıktan sonra elde ettiği 280 sayısını 7'den çıkararak 273 sayısına ulaşabilir. Başka bir öğrenci böyle bir muhakeme süreci içerisine girmeden 39 ve 7 sayılarını alt alta yazarak, sonuca ulaşma eğiliminde olabilir. İkinci tipteki öğrenci için önemli olan çarpma işleminde prosedürleri uygulamak ve doğru sonuca ulaşmaktır. Aritmetik işlemlerin çözümünde geleneksel algoritmalara bağlı kalınması, öğrencilerin zihinden hesap becerilerinin gelişimi üzerinde olumsuz etkiye sahiptir. Kamii, Lewis ve Livingston (1993), geleneksel çarpma algoritması (sayıları alt alta yazarak çarpma) öğretilmeyen üçüncü sınıf öğrencilerinin %60'ının 13x11 işlemini parçalara ayırma stratejisini (1010) kullanarak zihinden yaptıklarını (13x10=130; 130+13=143), tersine geleneksel algoritmanın öğretildiği dördüncü sınıf öğrencilerinin sadece %15'inin aynı işlemi zihinden doğru bir şekilde çözdüklerini tespit etmişlerdir.

1.1. Zihinden Hesap Stratejilerinin Öğretimine İlişkin Görüşler

Literatürde zihinsel hesap stratejilerinin öğretimine yönelik iki yaklaşımdan bahsedilmektedir. Bu yaklaşımlardan ilki, öğrencilerin zihinsel hesap stratejilerini kendilerinin icat etmeleri ve problem çözümlerinde icat ettikleri stratejilere başvurmalarıdır (Buzeika, 1999; Heirdsfield, 2006; Plunkett, 1979; Thompson, 2010). İkinci yaklaşım ise bazı stratejilerin doğrudan öğretilmesinin gerekli olduğudur (Beishuizen, 1999; Murphy, 1999; Thompson, 2010). İngiltere'de zihinden hesap stratejilerin öğretiminde, yukarıda belirtilen birinci yaklaşıma uygun çeşitli girişimler ve bir dizi rapor yayınlanmıştır (DES, 1991; DfE, 1995; DfEE, 1999). Ortaya çıkan sonuçlar, her öğrencinin zihinden hesap stratejilerini kullanmada ve icat etmede aynı performansı göstermediğini ortaya koymaktadır (Askew, Bibby ve Brown, 1997; Gray, 1997). Örneğin, çoğu öğrenci dengeleme stratejisini icat etmede zorlanmaktadır (Thompson, 1999). Murphy (2004), çalışmasının başlangıcında öğrencilerin dengeleme stratejisini kullanmadığını tespit etmiştir. Öğrenciler toplama ve çıkarma işlemlerini zihinden yaparken sadece ileri ve geri doğru sayma ve parçalara ayırma stratejilerine başvurmuşlardır. Bu tespit sonrasında öğrenciler üzerinde dengeleme stratejisinin doğrudan öğretimi gerçekleştirilmiştir. Bu açıdan SCAA (1997), öğrencilerde zihinden hesap stratejilerinin gelişiminin şansa bırakılmaması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu görüşe paralel olarak, Cooper, Heirdsfield ve Irons (1996), zihinden hesap yapma becerisi zayıf öğrencilerin belirlenmesi ve bu tip öğrencilere zihinden hesap stratejilerinin doğrudan öğretilmesi gerektiği görüşünü paylaşmıştır. Klein, Beishuizen ve Treffers (1998), toplama ve çıkarma problemlerini çözme konusunda yetersiz olan öğrencilerin, problemleri çözmek için zihinden hesap stratejilerini kullanmada öğretmen desteğine ihtiyaç duyduklarını belirtmişlerdir. Blote, Klein ve Beishuizen (2000), öğrencilerin belli bir stratejinin ne zaman ve nasıl kullanılacağını bilmemelerinin, bir sorunun zihinden hesaplanmasında hangi stratejinin daha kullanışlı olduğunu değerlendirememelerinin ve sınıf bağlamının, öğrencilerin strateji tercihleri üzerinde etkili faktörler olduğuna temas etmiştir. Bu görüş, araştırma sonuçlarıyla desteklenmektedir. Örneğin, Amerika'da öğrenciler toplama işlemini zihinden yaparken, toplanan sayıların her ikisini de onluk ve birliklerine ayırarak parçalara ayırma stratejisini (1010) kullanmayı tercih etmektedirler. Çünkü erken okul yıllarından itibaren bu stratejinin öğretimi gerçekleştirilmektedir (Heirdsfield ve Cooper, 2004). Diğer taraftan Avrupa ülkelerinde ise bu strateji yerine, toplama işleminde toplanan sayılardan ikincisini onluk ve birliklere ayırma (N10), çıkarma işleminde ise çıkan sayıyı onluk ve birliklere ayırma stratejisi (N10) tercih edilmektedir. Çünkü bu stratejinin kullanımı ile öğrencilerin hata yapma riskinin daha az olacağı düşünülmektedir (Heirdsfield ve Cooper, 2004; Klein ve Beishuizen, 1994). Gerçekten de 63-47 işlemini zihinden yaparken parçalara ayırma stratejisine (1010) başvurulması, 3<7 olmasından ötürü öğrencilerin hata yapma riskini arttırmaktadır. Blote, Klein ve Beishuizen (2000), Hollandalı 2. sınıf öğrencilerinin toplama ve çıkarma işlemleri yaparken tercih ettikleri zihinden hesap stratejilerinin ne olduğunu araştırmışlardır. Öğrencilere toplama ve çıkarma işlemlerinin zihinden hesaplanmasında öncelikle ikinci sayıyı onluklara ve birliklere ayırma stratejisi (N10), ardından işleme giren her iki sayıyı onluk ve birliklere ayırma stratejisi (1010) öğretilmiştir. Öğrenciler başlangıçta N10 stratejisi ile işlemleri yaparken, 1010 strateji öğretildikten sonra öğrencilerde bu stratejiyi kullanmaya yönelik eğilim artmıştır. Bu sonuçlar sınıf bağlamının öğrencilerin strateji tercihlerini etkileyen bir faktör olduğunu ortaya koymaktadır. Duran, Doruk ve Kaplan (2016), toplama işleminde öğrencilerin çoğunlukla "parçalara ayırma stratejisini ve ileriye doğru ritmik sayma stratejisini kullandıklarını, azda olsa "10 ve 100'ün katlarına ulaşma" ve "uyuşan sayıları gruplandırma" stratejilerini kullandıklarını tespit etmişlerdir. Çalışmaya katılan öğrenciler, bu stratejiler dışında hiçbir stratejiye başvurmamışlardır. Çıkarma işleminde ise öğrencilerin en fazla "onar onar eksiltme" stratejisini, en az ise "onlukları ve birlikleri ayırarak çıkarma" stratejisine başvurmuşlardır. Buna rağmen çoğu öğrencinin zihinden toplama ve çıkarma işlemlerine yönelik herhangi bir stratejiyi doğru şekilde kullanmadığı ya da sorulara cevap vermediği belirlenmiştir. Güç ve Karadeniz (2016), yaptıkları çalışma sonucunda öğrencilerin toplama işlemini zihinden yaparken en az başvurdukları stratejinin parçalama ayırma stratejisi olduğunu tespit etmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin toplama işleminde bulunan sayıların özelliklerine uygun stratejiler kullanmak yerine, alışık oldukları ve benimsedikleri stratejileri tercih ettikleri görülmüştür. Diğer taraftan, yapılan bazı araştırmalar herhangi bir strateji öğretimine maruz kalmadan, öğrencilerin kendi stratejilerini geliştirebileceklerini ortaya koymaktadır (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema ve Empson, 1998; Heirdsfield, 2000; Kamii, Lewis ve Livingston, 1993). Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema ve Empson (1998), öğrencilerin icat ettikleri stratejiler üzerine sınıf içi tartışmaların, sözel bağlamsal problemlerin ve sınıf içi materyal kullanımının öğrencilerin zihinden hesap stratejileri icat etmeleri üzerinde olumlu etkileri olduğunu belirtmişlerdir. Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema ve Empson'e göre (1998), doğrudan zihinden hesap stratejilerinin öğretimi, öğrencileri bu stratejilere mekanik bir kural olarak başvurma tehlikesiyle karşı karşıya getirmektedir. Dolayısıyla, öğrencileri kullandıkları zihinden hesap stratejilerini tartışmaya ve bir problemin çözümünde kullanılabilecek zihinsel hesap stratejilerinin neler olabileceği üzerine düşünmeye teşvik etmek, öğrencilerin daha etkili çözüm stratejileri geliştirmelerine yardımcı olacaktır (Yang ve Huang, 2013).

Literatürde ortaya koyulan görüşler ve araştırma sonuçları, öğrencilerin önceki deneyimleri ve bilgi yapılarının farklılığından ötürü, her bir zihinden hesap stratejisini kullanmada ve icat etmede aynı performansı göstermediğini ortaya koymaktadır. Bunun yanında, zihinden hesap stratejilerinin doğrudan öğretimi, öğrencilerin bu stratejileri mekanik olarak kullanmalarına neden olabilmektedir. Öğretmenler ister birinci, ister ikinci yaklaşımı benimsemiş olsunlar, aritmetik işlemlerde zihinden hesap stratejilerini ve kullanımını bilmeli, bunun da ötesinde hangi durumlarda, hangi stratejinin kullanımının daha etkili olduğu hakkında deneyime sahip olmalıdırlar. Bu amaca ulaşabilmek adına yapılabileceklerden biri, ders kitaplarında farklı zihinden hesap stratejilerine ve farklı soruların ve bağlamsal problemlerin çözümünde, hangi zihinden hesap stratejisinin kullanımının daha etkili olabileceğine yönelik uygulamalara yer verilmesidir. Nitekim, Türk ve Singapur matematik öğretim programlarında "öğrencilere farklı zihinden hesap stratejilerini icat etmeleri için fırsatlar sunulmalı" vurgusu yapılmaktadır. Ancak ders kitaplarının içeriği bu doğrultuda hazırlanmamış olabilir. Öğretmenler tarafından kullanılan birincil kaynağın, ders kitabı olduğu düşünüldüğünde böyle bir durumun öğrenciler üzerinde olumsuz bir etki yaratabilme potansiyeli vardır. Örneğin, ders kitaplarında belirli zihinden hesap stratejilerine yer verilmesi, öğretmenlerin öğrencilere strateji oluşturma sürecinde rehberlik etmelerini ve öğrencilerin icat ettikleri stratejilerle ilgili sınıf içi tartışmaları yönetmelerini olumsuz şekilde etkileyebilir. Yukarıda belirtilenler ışığında, matematik ders kitaplarında aritmetik işlemlerin zihinden hesaplanmasında hangi stratejilere yer verildiğinin ve ders kitaplarının öğrencilerin farklı stratejiler kullanmaları, icat ettikleri stratejileri arkadaşlarıyla tartışmaları amacıyla ne tür uygulamalar ve açıklamalar içerdiğinin belirlenmesi önemlidir.

Diğer taraftan, uluslararası sınavların sonuçları Türk öğrencilerin zihinden hesap becerisinin kullanımını içeren, sayılar ve işlemler öğrenme alanında, düşük bir performans gösterdiğini ortaya koymaktadır. Tersine Singapurlu öğrenciler, sayılar ve işlemler öğrenme alanında başarı puanı olarak ilk sıralarda yer almışlardır (Mullis ve ark, 2000; 2008; 2012; 2016). Türk ve Singapurlu öğrencilerin sayılar öğrenme alanındaki performansları arasındaki farklılığı bir çok nedene dayandırmak mümkündür. Bu nedenlerden biri de matematik ders kitaplarının içeriğinin nasıl oluşturulduğudur. Çünkü, ders kitabı, öğretmenin matematik öğretirken kullandığı temel kaynaktır (Beaton, Mullis, Martin, Gonzales, Kelly ve Smith, 1996). Farklı ders kitapları öğrencilere farklı öğrenme fırsatları sunduğundan dolayı ders kitapları karşılaştırma çalışmaları, öğrencilerin başarıları arasındaki farklılığın açıklanmasında yardımcı olabilmektedir (Mesa 2004; Valverda Bianchi, Wolfe, Schmidt ve Houang, 2002; Zhu ve Fan 2006). Bu bakımdan, kitap karşılaştırma çalışmalarının son yıllarda yaygınlaştığı görülmektedir. Bu çalışmalarda özellikle TIMSS, PISA gibi uluslararası sınavlarda ilk sıralarda yer alan Çin, Kore, Japonya, Tayvan, Singapur, Finlandiya gibi ülkelerin ders kitapları kullanılmıştır. Türkiye'de kullanılan matematik ders kitaplarının ise Amerikan ders kitaplarıyla (Kar ve Işık 2015; Kar, Güler, Şen ve Özdemir, 2018) ve Amerikan-Singapur ders kitaplarıyla karşılaştırıldığı çalışmalar (Erbaş, Alacacı ve Bulut 2012; Özer ve Sezer 2014) literatürde yer almaktadır. Türk ders kitapları, Singapur kitaplarıyla sadece tasarım özellikleri açısından (Erbaş, Alacacı ve Bulut 2012) ve problem tipi açısından (Özer ve Sezer, 2014) karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada, Türk ve Singapur ders kitapları, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde zihinden hesap stratejilerine yer verme durumları açısından karşılaştırılmıştır. Çalışmada yanıt aranan problemler şu şekildedir.

- Türk ve Singapur ders kitapları, öğrencilerin zihinden hesap yaparken, kendilerine özgü stratejiler icat etmeleri ve icat ettikleri stratejileri akranlarıyla tartışmaları adına ne tür açıklamalar ve uygulamalar içermektedir?
- Türk ve Singapur ders kitaplarında aritmetik işlemlerin zihinden hesaplanmasında hangi stratejilere yer verilmiştir.

1.2. Aritmetik İşlemlerde Kullanılabilecek Zihinden Hesap Stratejileri

Aşağıda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin zihinden hesaplanmasında kullanılan her bir zihinden hesap stratejisine ilişkin örnekler yer almaktadır. Tablo 1'in hazırlanmasında literatürde yapılmış çalışmalardan yararlanılmıştır (Beishuizen ve Anghileri, 1998; Buys, 2001; Erdem, 2016; Heirdsfield ve Cooper, 2004; Lemonidis, 2015; Moyo ve Samson, 2014; Thompson, 1999; 2000; Van De Walle, 2010; Varol ve Farran, 2007; Verschaffel, Greer ve De Corte, 2007; Yang ve Huang, 2013).

Tablo 1. Aritmetik işlemler için zihinden hesaplama stratejileri

Strateji	Toplama 29+36; 49+86	Çıkarma 86-28; 58-35	Çarpma	Bölme
COB	120 130 140	110 100 90	23x5=? 23+23=46+23=69+23=92+23 =115 veya 23+23=46, 23+23=46, 46+23=69, 69+46= 115 8x25=? 2x25=50, 50+50=100, 100+100=200 5x8=5, 10, 15…	128/8=64, 32, 16 128/2=64, 64/2=32, 32/2=16; 24/4=? 24-4=20 20-4=16 16-4=12 12-4=8
1010	20+30=50 9+6=15 50+15=65 40+80=120 9+6=15 120+15=135	80-20=60 6-8=(-2) 60+(-2)=58 50-30=20 8-5=3 20+3=23	11x18=(10+1)x(10+8) (10x10)+(10x8)+(1x10)+(1x8) 8x25=2x4x25=2x100=200	
N10, 10N	29+30=59 59+6=65 veya 20+36=56 56+9=65 49+80=129 129+6=135	86-20=66 66-8=58 58-30=28 28-5=23 50-35=15 15+8=23	28x4=? 20x4=80 8x4=32 80+32=112	116/4=? 100/4=25 16/4=4 25+4=29
10s	20+30=50 50+9=59 59+6=65 40+80=120 120+9=129 129+6=135	80-20=60 60+6=66 66-8=58 50-30=20 20+8=28 28-5=23	46x7=? 40x10=400 40x3=120 400-120=280 6x7=42 280+42=322	

Tablo 1'in devamı

SC		30-28=2 56+2=58 40-35=5 18+5=23		
M 5,10,100	4+36=40 25+40=65 86=85+1 49+1=50 85+50=135	86-6=80 80-22=58 86=78+8 78-28=50 50+8=58 86-26=60 60-2=58		
N10C	30+36=66 66-1=65 50+86=136 136-1=135	86-30=56 56+2=58 veya 60-35=25 25+2=27	28x4=? 30x4=120 2x4=8 120-8=112 8x99=? 8x100=800 800-8=792 18x25=18x100=1800 1800/4=450	116/4=? 120/4=30 4/4=1 30-1=29 100/5=20 100/10=10 10x2=20
A10	29+1=30 30+35=65 49+1=50 50+85=135 88-30=58		28x25=? (28:2)x(25x2)= (14:2)x(50x2)=700	$33 \div 1\frac{1}{2}$=? 66÷3=22
ND	16+18=? 16+16=32 32+2=34	92-45=? (45+45+2)-45 45+2=47		
GCN	34+8+16=? (34+16)+8 50+8=58	63-8-13=? (63-13)-8 50-8=42	2x34x5=? (2x5)x34=10x34=340	
10^n			12x100=1200	1200÷10=120

İleri veya geri ritmik sayma stratejisinde (COB), birerli, ikişerli, beşerli, onarlı vb. şekilde ileri veya geri sayılarak sonuca ulaşılır. Bu stratejide çarpma ve bölme işlemleri yapılırken, tekrarlı toplama ve tekrarlı çıkarma düşüncesinden yararlanılır. 1010 stratejisinde sayılar onluklar ve birlikler şeklinde yazılır. Örneğin, 58-35 işleminde toplanan sayılar, 50 ve 8, 30 ve 5 şeklinde parçalara ayrılır. 11x18 işlemine 1010 stratejisinin uygulanmasında, işlem (10+1)x(10+8) şeklinde düzenlenir. N10 stratejisinde ikinci sayı onluk ve birlik şeklinde yazılırken, 10N stratejisinde birinci sayı onluk ve birlik biçiminde yazılır. Örneğin, 58-35 işlemi N10 stratejisi ile yapılırken, ikinci sayı 30 ve 5 şeklinde parçalanır, aynı soru 10N stratejisiyle yapılırken birinci sayı 50 ve 8 şeklinde parçalara ayrılır. N10 stratejisinin çarpma işlemine uygulanmasında, 28x4 işlemi için 28 sayısı, 20 ve 8 şeklinde parçalara ayrılarak, sırasıyla 4 ile çarpılır ve çıkan sayılar toplanarak sonuca ulaşılır. 116/4 işleminde benzer düşünceyle 116 sayısı, 100 ve 16 şeklinde parçalara ayrılarak, sırasıyla 4'e bölünür. Elde edilen sayılar toplanarak sonuca ulaşılır. 10s stratejisinde öncelikle iki sayının onlukları işleme tabi tutulur (58-35 işleminde 50-30=20). Ardından öncelikle birinci sayının birliği daha sonra ikinci sayının birliği ile işlem yapılarak sonuca ulaşılır (20+8=28, 28-5=23). SC stratejisinde çıkarma işlemi yapılırken, eksilen sayının parçalarından biri; çıkan sayıya en yakın büyük onluk olacak şekilde seçilir. Örneğin 58-37 işleminde 37 sayısına en yakın büyük onluk 40'dır. O halde 58 sayısı 40 ve 18 olarak parçalanır. Ardından 40-37=3 ve 3+18=21 şeklinde sonuca ulaşılır. M5,10,100 stratejisinde, sayılar, işlem içerisinde 5, 10 ve 100'ün katına ulaşmak adına uygun biçimde parçalanır. Örneğin, 29+36 işleminde 29 sayısı, 4 ve 25 olarak parçalara ayrılabilir. N10C stratejisi sayılardan birini onluğa ve yüzlüğe yuvarlayıp ardından düzenleme yapmayı gerektirir. Örneğin, 58-35 işleminde 58 sayısı 60'a yuvarlanır, 60'dan 35 çıkarılarak 25 elde edilir. Ardından düzenleme yapılarak 25'e 2 eklenir ve 27 sonucuna ulaşılır. 28x4 işleminde N10C stratejisinin uygulanmasında, 30 ve 2 sayısı 4 ile çarpılır. Ardından 120'den 8 çıkarılarak 112 sonucuna ulaşılır. 116/4 işleminde aynı stratejinin uygulanmasında 120 ve 4 sayıları, 4'e bölünür. Ardından 30'dan 1 çıkarılarak 29 sonucuna ulaşılır. A10 stratejisi, her iki sayıyı da düzenlemeyi gerektirir. Örneğin, 49+86 işleminde 49, 50'ye, 86'da 85'e yuvarlanarak sonuca daha kolay şekilde ulaşılır. 86-28 işlemi üzerinde A10 stratejisinin uygulanmasında, 86-28 işlemi 88-30 şeklinde düzenlenir. 33÷1 1/2 işleminde ise her iki sayıda iki ile çarpılarak düzenleme yoluna gidilir. ND stratejisinde sayı ikililerinden yararlanılır. Örneğin, 16+18 işleminde, 18 sayısı 16 ve 2 şeklinde parçalanır. Aynı strateji ile 92-45 işleminde 92 sayısı 45, 45 ve 2 şeklinde parçalanır. GCN stratejisi uyumlu sayıların gruplandırılması düşüncesine dayalıdır. Örneğin, 24+16+26 işleminde 24 ve 26 toplamı 50 olacağından işlem 50+16 şekline dönüştürülür. Benzer şekilde 63-8-13 işleminde 63-13, 50 olacağından işlem 50-8 şeklinde ifade edilir. 10^n stratejisi ile sayı 10'nun kuvvetleri ile zihinden çarpılır veya bölünür. Örneğin, 1200 sayısı 100'e bölünürken, 1200 sayısındaki iki sıfır atılır sonuç 12 olarak bulunur. 12 sayısı 100 ile çarpılırken, 12 sayısının sağına iki sıfır eklenerek sonuç 1200 olarak elde edilmiş olur.

2. Yöntem

2.1. Çalışmada Kullanılan Ders Kitapları

Türkiye'deki ortaokullarda hangi kitapların kullanılacağı Milli Eğitim Bakanlığının kontrolü altındadır. Türkiye'de öğretmenler Eğitim Bakanlığınca okullara gönderilen ders kitaplarını kullanmaktadırlar. Nitekim, Eğitim Bakanlığı öğretmen ve öğrencilere dağıtılan ders kitapları ve eğitim materyalleri dışındaki yardımcı kaynakların kullanılmaması gerektiği konusunda okulları uyarmıştır. Bu açıdan Türkiye'de derslerde kullanılan temel kaynak Eğitim Bakanlığı bünyesinde ve kontrolünde çıkarılan ders kitaplarıdır. Bu çalışmada ilk baskısı 2018 yılında Milli Eğitim Yayınevinden çıkan 3. sınıf matematik ders kitabı (TR1), Doğan ve Gezmiş (2018) tarafından yazılan 3. sınıf matematik ders kitabı (TR2) ve Özçelik (2018) tarafından yazılan 4. sınıf matematik ders kitabı (TR3) analiz edilmiştir. Her üç kitapta, Türk ortaokullarında 2018-2019 eğitim öğretim yılında kullanılmış olup çalışma içerisinde TR1, TR2 ve TR3 şeklinde kodlanmıştır.

Singapur eğitim sisteminde, İlköğretim, 1. ve 4. sınıflar arasındaki 4 yıllık "Temel Evre" ve İlköğretim 5. ve 6. sınıfları kapsayan 2 yıllık "Yönlendirme Evresinden oluşmaktadır. Singapur'da ilköğretim kademesinde şu anda dört adet matematik kitabı kullanılmaktadır. Bu kitaplar; My pals are here!, New Syllabus Primary Mathematics, Shaping Maths, Targeting Mathematics isimli kitaplardır. Singapur ortaokullarının yaklaşık %60'ında My pals are here! isimli kitap kullanılmaktadır. Bu kitap ilk kez 2001 yılında basılmış olup, bilişsel gelişim teorileri, üstbiliş teorileri ve yapılandırmacılık esas alınarak içerik oluşturulmuştur (Yang, Reys ve Wu 2010). Çalışmada My pals are here! ve Targeting Mathematics isimli Singapur kitapları analiz edilmiştir. Kitaplar çalışma içerisinde MP ve TAR biçiminde kodlanmıştır. Türk kitaplarında zihinden toplama ve çıkarma işlemleri ile ilgili kazanımlar birinci sınıfta verilmeye başlanırken, Singapur'da üçüncü sınıfta verilmeye başlanmaktadır. Çarpma ve bölme işleminin zihinden hesabı konusu Türk kitaplarında dördüncü sınıf düzeyinde verilmeye başlanırken, Singapur kitaplarında zihinden çarpma işlemi ikinci sınıf düzeyinde, zihinden bölme işlemi üçüncü sınıf düzeyinde verilmektedir. Singapur'da zihinden çarpma işlemi konusu ikinci sınıf düzeyinde küme modelleri kullanılarak öğretilmekte, ilerleyen sınıflarda da daha büyük sayılarla ancak benzer düşünceyle öğretimi devam etmektedir. Yukarıda ifade edilenler doğrultusunda iki ülkenin üçüncü ve dördüncü sınıf matematik ders kitapları analize dahil edilmiştir. Türkiye'de zihinden çarpma ve bölme işlemi konusunun içeriği, Singapur'da beşinci sınıf matematik ders kitapları içerisinde yer aldığından, analiz sürecine beşinci sınıf Singapur matematik ders kitapları da dahil edilmiştir. Her iki ülke okullarında Eğitim Bakanlığı'nın onayından geçen kitaplar kullanılmaktadır. Çalışma kapsamında incelenen kitaplar Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Çalışmada Analiz Edilen Türk ve Singapur Ders Kitapları

Ülke	İncelenen Ders Kitapları
Singapur	Kheong, F. H., Ramakrishnan, C., Choo, M. (2017). My Pals are Here Maths 3A (Pupil's Book), Mashall Cavendish Education: Singapore. Kheong, F. H., Soon, G. K., Ramakrishnan, C. (2018). My Pals are Here Maths 4A (Pupil's Book), Mashall Cavendish Education: Singapore. Kheong, F. H., Soon, G. K., Ramakrishnan, C. (2017). My Pals are Here Maths 5A (Pupil's Book), Mashall Cavendish Education: Singapore. Ming, E. C. C. (2016). Targeting Mathematics 3A, Star Publishing PTE LTD: Singapore. Ming, E. C. C. (2016). Targeting Mathematics 4A, Star Publishing PTE LTD: Singapore. Ming, E. C. C. (2017). Targeting Mathematics 5A, Star Publishing PTE LTD: Singapore.
Türkiye	Komisyon (2018). Ortaokul Matematik 3. Sınıf. Devlet Kitapları: Ankara. Doğan ve Gezmiş (2018). Ortaokul Matematik 3. Ada Yayıncılık: Ankara. Özçelik, U. (2018). Ortaokul Matematik 4. Ata Yayıncılık: Ankara.

2.2. Verilerin Toplanması ve Analizi

Çalışmada Türk ve Singapur ders kitapları aritmetik işlemlerde zihinden hesap stratejilerine yer verme durumları açısından karşılaştırılmıştır. Öncelikle zihinden hesap üzerine çalışmaları bulunan matematik eğitimcisi iki akademisyen bir araya gelerek; Türk ve Singapur ders kitaplarında zihinden hesabın yer aldığı ders kitaplarını ve kitaplarda bu konunun geçtiği yerleri belirlemişlerdir. Ardından, birbirinden bağımsız şekilde, toplama ve çıkarma işleminin zihinden hesaplanması konusuna nasıl giriş yapıldığını, konuya kaç sayfa yer ayrıldığını not etmişlerdir. Konuya nasıl giriş yapıldığının belirlenmesinde, "konuya doğrudan strateji öğretimi yapılarak mı girildiği" veya "bağlamsal problemlerle konuya giriş yapılarak, problemi öğrencilerin kendilerine özgü icat ettikleri stratejilerle çözmelerinin mi istendiği" kitapların içeriği incelenerek ortaya konulmuştur. Bir sonraki aşamada ders kitaplarının öğrencilerin farklı stratejiler kullanmalarına, kullandıkları stratejileri akranlarıyla tartışmalarına, bir toplama ve çıkarma işlemi sorusunun zihinden hesaplanmasında en uygun olan stratejinin ne olduğunu değerlendirmelerine fırsat sunup sunmadığı değerlendirilmiştir. İki farklı araştırmacı birbirlerinden bağımsız şekilde ders kitaplarında aritmetik işlemlerde zihinden hesaba ilişkin yer verilen alıştırmaları ve bu alıştırmaların çözümünde kullanılan stratejileri bir A4 kağıdına not etmişlerdir. Ders kitaplarında yer verilen zihinden hesap stratejilerinin belirlenmesinde, Tablo 1'de yer alan zihinden hesap stratejileri kullanılmıştır. Türk ve Singapur ders kitaplarında, aritmetik işlemlerin zihinden hesaplanmasında yer verilen zihinsel hesap stratejilerinin neler oldukları tablolarda gösterilmiş, tabloların altına ders kitaplarından alınan örnekler eklenmiştir. Ders kitaplarındaki ilgili içerikler, iki araştırmacı tarafından üst üste iki defa okunarak analiz edilmiş, yapılan analizde araştırmacılar arasında tam bir uyumun olduğu görülmüştür.

2.3. Çalışmanın Geçerliği ve Güvenirliği

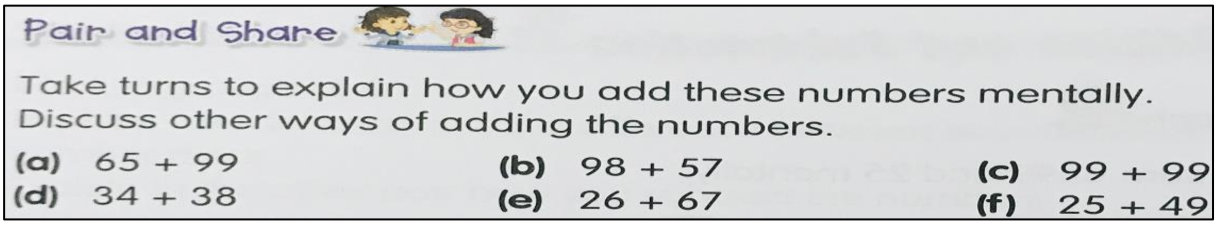
Singapur ders kitapları, ilgili yayınevlerinden temin edinmiş olup, Singapur okullarında kullanılan kitaplardır. Türk ders kitapları ise http://www.eba.gov.tr/ekitap?&channel=334 sitesinden temin edilmiştir. Çalışmaya dahil edilen ders kitapları Türkiye ve Singapur'da 2018-2019 eğitim öğretim yılında kullanılan ders kitaplarıdır. Analizler zihinden hesap konusunda çalışmaları olan, İngilizceyi bilen matematik eğitimcisi iki farklı akademisyen tarafından yapılmıştır. Ders kitaplarında zihinden hesap konusunun geçtiği kısımlar belirlendikten sonra araştırmacılar kitaplarda yer verilen zihinden hesap alıştırmalarını ve bu alıştırmaların çözümünde kullanılan stratejileri boş bir kağıda aktarmışlardır. Bu işlem iki kez tekrarlanmıştır. Her bir ders kitabı için araştırmacıların not ettikleri alıştırma-strateji ikilisi bire karşılaştırılmış ve yapılan analizlerde tam bir uyumun olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca çalışma içerisinde, ders kitaplarında yer alan zihinden hesap stratejilerinin nasıl kullanıldığına ilişkin örneklere yer verilmiştir. Türk ve Singapur ders kitaplarında, öğrencilerin aritmetik işlemleri zihinden yaparken farklı stratejiler kullanmaları (icat etmeleri), icat ettikleri stratejileri akranlarıyla tartışmaları, sorunun zihinden hesaplanmasında en uygun olan stratejinin ne olduğunu değerlendirmeleri ve akranlarıyla tartışmaları amacıyla ne tür uygulamalara ve açıklamalara yer verildiği analiz edilirken, ders kitaplarındaki içerik, "doğrudan strateji öğretimi var-yok", "farklı stratejiler kullanmaya teşvik edici problem/alıştırma var-yok", "Öğrencilerin icat ettikleri stratejileri arkadaşlarıyla tartışmalarını teşvik ediyor-etmiyor", "Öğrencilerin sorunun zihinden hesaplanmasında en uygun olan stratejinin ne olduğunu değerlendirmelerine ve akranlarıyla tartışmalarına imkan tanır veya tanımaz" şeklinde kodlanmıştır. Kodlamalar iki araştırmacı tarafından iki kez üst üste yapılmış, kodlamalarda tam bir uyumun olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca ders kitaplarında, öğrencileri farklı stratejiler kullanmaya ve icat ettikleri stratejileri akranlarıyla tartışmaya yönlendiren içerik örnekleri çalışma içerisinde verilmiştir. Çalışmada, sadece toplama ve çıkarma gibi belirli işlem ikililerine odaklanılmamıştır. Ders kitaplarının toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde zihinden hesap stratejilerine yer verme durumları açısından karşılaştırılması, elde edilen bulguların birbiriyle ne denli tutarlı olduğunu değerlendirme fırsatı sağlamıştır.

3. Bulgular

Bu kısma, ders kitaplarında toplama ve çıkarma işlemlerinin zihinden hesaplanması konusuna nasıl giriş yapıldığına, öğretim sürecinde nasıl bir yol izlendiğine ve konuya kaç sayfa yer ayrıldığına ilişkin elde edilen bulgularla başlanmış, ardından ders kitaplarında toplama ve çıkarma işleminin zihinden hesaplanmasında kullanılan stratejilerin neler olduğu, kitaplarda yer alan örneklerle desteklenerek açıklanmıştır. Çarpma ve bölme işleminin zihinden hesaplanması konusu içinde benzer aşamalar takip edilerek bulguların sunumu gerçekleştirilmiştir.

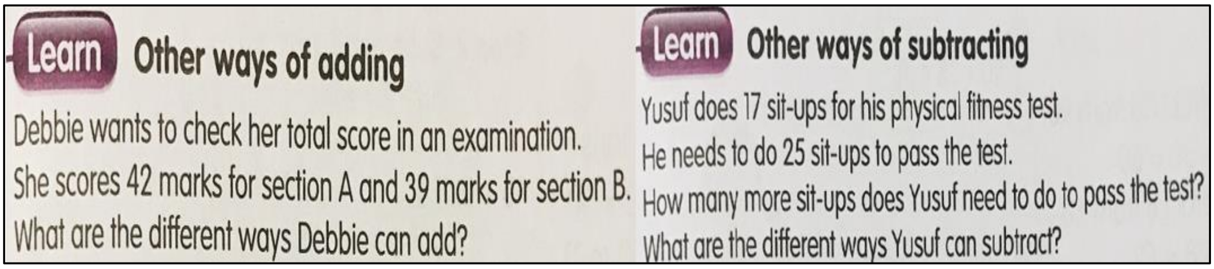
3.1. Ders Kitaplarında Yer Verilen Zihinsel Hesap Stratejileri: Toplama ve Çıkarma İşlemleri

TR1 ve TAR kodlu üçüncü sınıf ders kitaplarında, zihinden toplama ve çıkarma işlemlerinin zihinden hesaplanması konularına doğrudan zihinden hesap stratejilerinin kullanımı örneklendirilerek başlanmıştır. Bu iki kitapta, öğrencilerden konu sonunda verilen toplama ve çıkarma işlemi alıştırmalarını, farklı stratejiler kullanarak yapmaları istenmiştir (Şekil 1). Dikkat çekici önemli bir diğer bulgu her iki kitapta konu sonunda öğrencilerin farklı stratejiler icat ederek işlemi zihinden yapmalarını teşvik edici bağlamsal problemlere yer verilmemiş olmasıdır.



Şekil 1. TAR' da öğrencilerin farklı stratejiler kullanmaları istenen alıştırma (3A, s.44).

TAR kodlu kitapta doğrudan strateji öğretimi gerçekleştirildikten sonra öğrencilerden Şekil 1'de verilen alıştırmaları farklı yollarla yapmaları ve tartışmaları, TR1 kodlu kitapta, TAR kodlu kitapta olduğu gibi konu sonunda, öğrencilerden, 10, 1, 100, 50, 200 sayıları ile öğretmenin söylediği herhangi bir sayının toplamını zihinden farklı yollarla yapmaları istenmiştir (TR1, s.75). TR2 kodlu Türk kitabı ile MP kodlu Singapur kitaplarında ise diğer iki kitaptan farklı olarak, konuya doğrudan strateji öğretimi ile başlanmamış, bağlamsal bir problem verilerek (Şekil 2), öğrencilerden problemi farklı stratejiler icat ederek çözmeleri istenmiştir. Ardından strateji öğretimine geçilmiştir. Konu sonunda, öğrencilerin farklı stratejiler kullanarak çözmeleri amacıyla alıştırmalar verilmiştir. MP ve TR2'de konuya altı sayfa, TR1'de yedi sayfa yer ayrılmıştır. TAR kodlu kitapta ise konuya ayrılan toplam sayfa sayısı üçtür.



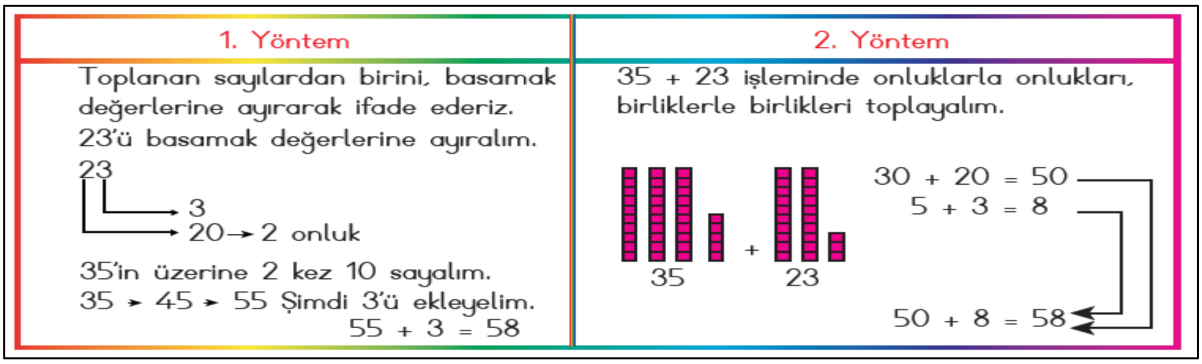
Şekil 2. MP'de yer verilen bağlamsal problemler (3A, s.43 ve 69)

MP kodlu kitapta, toplama işleminin zihinden hesabı konusuna "Debbie sınavdan aldığı toplam puanı kontrol etmek istiyor. Sınavın ilk bölümünden 42 puan, ikinci bölümünden 39 puan aldığına göre, sınavdan aldığı toplam puanı kaç farklı yolla hesaplayabilir?" şeklinde bir bağlamsal problem ile başlanmıştır. Çıkarma işlemi için de benzer bir bağlamsal problem kullanılmıştır. TR2 kodlu Türk kitabında da doğrudan strateji öğretimine geçilmeden öğrencilerin strateji icat etmeleri amacıyla, "Okulumuzda 3/A sınıfına 28, 3/B sınıfına 32 okul sütü dağıtıldı. 3/A ve 3/B sınıflarına dağıtılan kaç tane okul sütü olduğunu zihinden işlem yaparak bulabilir misiniz? Tartışınız" şeklinde bir problemle (TR2, s.67) konuya giriş yapılmıştır. Görüldüğü gibi TR2 ve MP kodlu kitaplarda toplama ve çıkarma işleminin zihinden hesabı konusunun öğretimi; "öğrencilerin bağlamsal problemleri kendilerine özgü stratejiler kullanarak çözmeleri", "strateji öğretimi", "alıştırmalar verilerek öğrencilerin farklı stratejiler kullanarak alıştırmaları zihinden yapması" şeklinde bir sıra izlemektedir. TR1 ve TAR kodlu kitaplarda konuya doğrudan strateji öğretimi ile başlanmış ardından alıştırmalar verilerek öğrencilerin farklı stratejiler kullanarak alıştırmaları zihinden yapması istenmiştir. Tüm kitaplarda öğrencilerden, toplama ve çıkarma işlemlerini zihinden yaparken farklı stratejiler kullanmaları beklense de, öğrencilerin icat ettikleri stratejiler arasında, işlemin zihinden hesaplanmasında kullanımı en uygun stratejinin hangisi olması gerektiğini düşünmelerine ve akranlarıyla tartışmalarına yönelik bir içeriğe yer verilmediği tespit edilmiştir. Kitaplarda, toplama ve çıkarma işlemleri için kullanılan zihinsel hesap stratejileri Tablo 3'de verilmiştir.

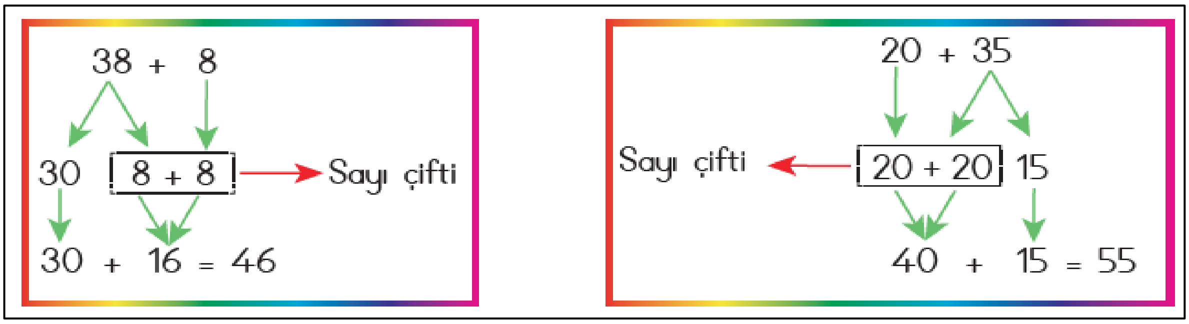
Tablo 3. Toplama ve Çıkarma İşlemlerinin Çözümünde Kullanılan Zihinden Hesap Stratejileri

Strateji	Toplama İşlemi				Çıkarma İşlemi			
	TR1	TR2	TAR	MP	TR1	TR2	TAR	MP
COB		x			x			
1010	x	x		x				x
N10	x	x		x			x	x
10N		x			x	x	x	
10s								
SC								x
M5,10,100			x	x			x	x
N10C			x	x	x	x		x
A10								
ND	x							
GCN								

TAR kodlu Singapur kitabının dışındaki kitaplarda, 1010 ve N10 stratejileri kullanılarak toplama işleminin sonucunun zihinden nasıl bulunacağı örneklendirilmiştir. TR1'de diğer kitaplarda olmayan ND stratejisinin kullanımı, TR2'de ise COB ve 10N stratejilerinin kullanımı örneklendirilmiştir. Şekil 3 ve 4'de TR1'de toplama işleminin zihinden hesaplanmasında kullanılan stratejilere ilişkin örnekler sunulmuştur.

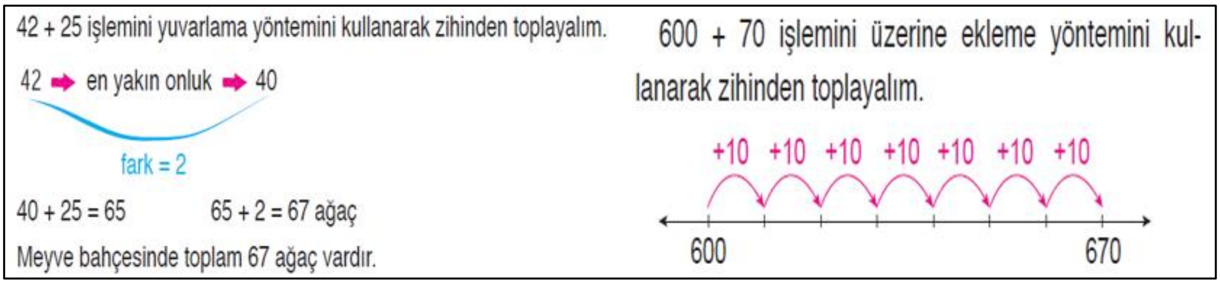


Şekil 3. TR1 kodlu kitapta toplama işleminin çözümünde kullanılan N10 ve 1010 stratejisi (s.73).



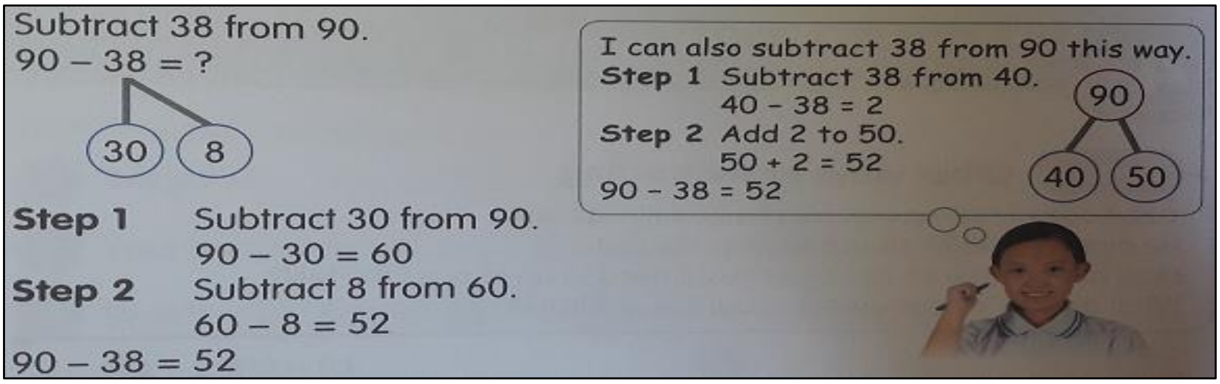
Şekil 4. TR1 kodlu kitapta toplama işleminin çözümünde kullanılan ND stratejisi (s.73).

Şekil 3'de görüldüğü üzere TR1 kodlu kitapta 35+23 işleminin zihinden çözümünde ilk yöntem olarak N10 stratejisi kullanılmış, 23 sayısı onluklarına ve birliklerine ayrılmıştır. Ardından 35 ile 20 toplanmış çıkan sonuç üzerine 3 eklenmiştir. Kitapta yer alan ikinci çözümde her iki sayıda onluklarına ve birliklerine ayrılmış, onluklar (30 ve 20) ve birlikler (5 ve 3) kendi aralarında toplanmış ardından 50 ile 8 toplanarak 58 sonucuna ulaşılmıştır. Şekil 4'de ise diğer hiçbir kitapta yer verilmeyen sayı çiftlerine ulaşma stratejisinin kullanımı örneklendirilmiştir. 20+35 işleminde 35 sayısı 20 ve 15 şeklinde parçalanmış, 20'ler kendi arasında toplanmış, ardından 40'a 15 eklenerek 55 sonucuna ulaşılmıştır. TR2 kodlu kitapta toplama işleminin zihinden hesaplanmasında diğer kitaplarda yer almayan 10N ve COB stratejilerine nasıl yer verildiği Şekil 5'de gösterilmektedir.



Şekil 5. TR2 kodlu kitapta toplama işleminin çözümünde kullanılan 10N ve COB stratejisi (s.68-69).

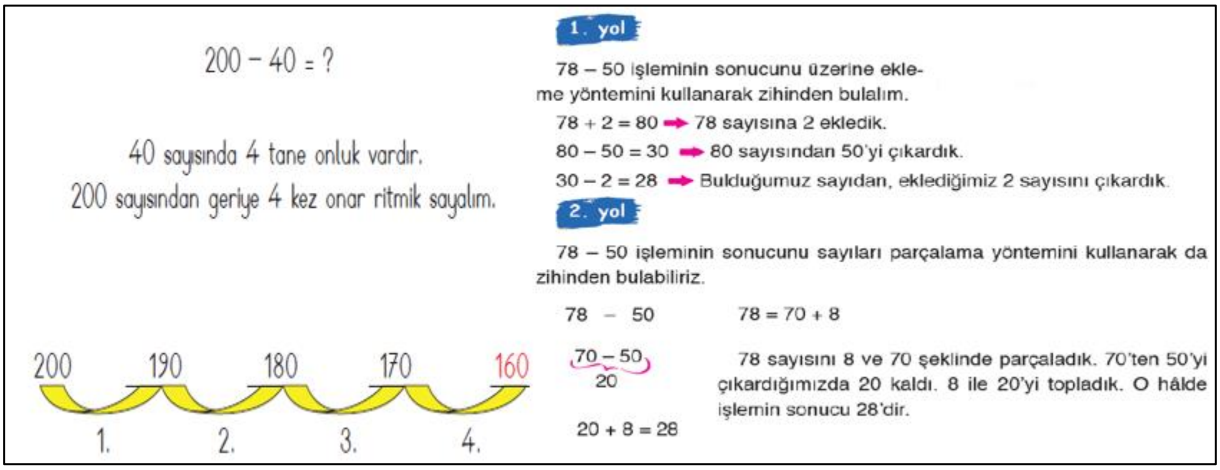
Şekil 5 incelendiğinde, TR2 kodlu kitapta 42+25 işlemi zihinden yapılırken 42 sayısı 40 ve 2 şeklinde parçalara ayrılmış ardından 40 ile 25 toplanarak 65 sayısına ulaşılmış, bu sayıya 2 eklenerek sonuç 67 bulunmuştur. Bu strateji de N10 stratejisinin aksine toplanan sayılardan ilki yani 42 onluklarına ve birliklerine ayrılmaktadır. TR2'de 600+70 işleminin sonucuna 600'ün üzerine 7 kez 10 eklenerek ulaşıldığı görülmektedir. Singapur kitaplarında toplama işleminin zihinden hesaplanmasında, 1010 ve N10 stratejilerinin toplama işleminin zihinden hesaplanmasında kullanımının yanında (MP, 3A, s.43), Türk kitaplarında yer almayan, M5,10,100 ve N10C stratejilerinin kullanımına değinilmiştir. TAR kodlu Singapur kitabında ise toplama işleminin zihinden hesabı, sadece M5,10,100 ve N10C stratejileri kullanılarak yapılmıştır (3A, s.43). Şekil 6'da MP kodlu kitaptan M5,10,100 ve N10C stratejilerinin kullanımına ilişkin alınan örnekler sunulmuştur.



Şekil 6. MP'de toplama işleminin çözümünde kullanılan M5,10,100 ve N10C stratejileri (3A, s.44).

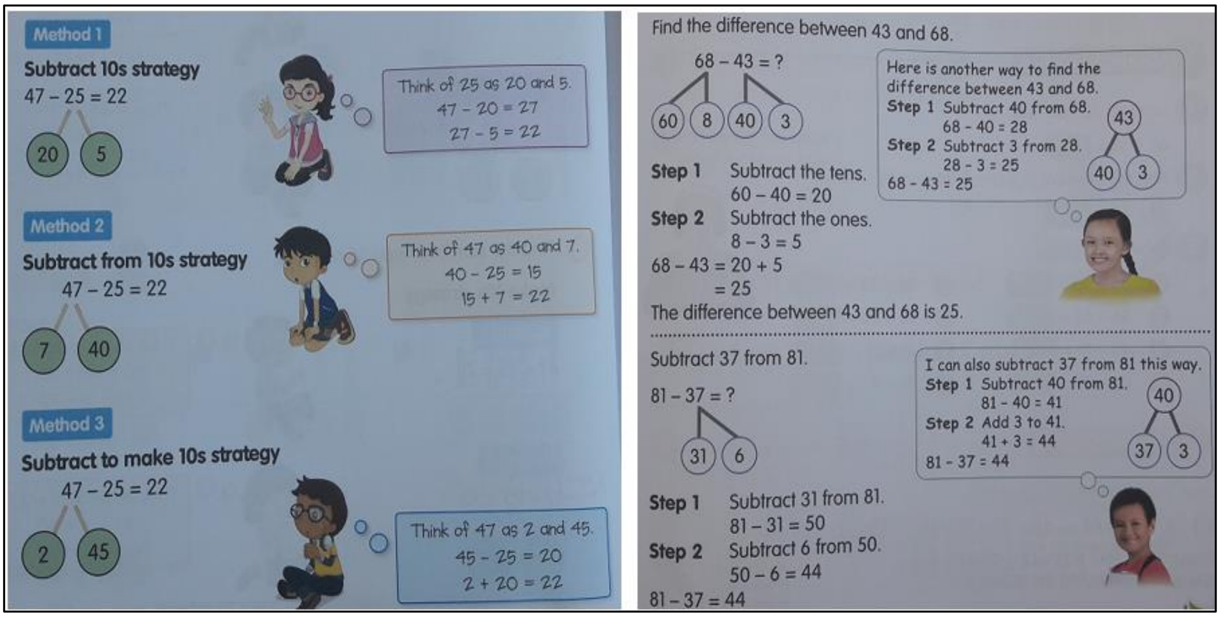
MP kodlu kitapta M5,10,100 stratejisi kullanılarak 13 sayısı 11 ve 2 şeklinde parçalanmış bu sayede 48 ile 2 toplanarak 10'un katı olan 50'ye ulaşılmıştır. Ardından 50 ve 11 toplanarak 61 sonucuna ulaşılmıştır. Aynı kitapta 48 sayısı 50 sayısına yuvarlanmış 50 ve 13 toplanarak 63 sayısına ulaşılmış ardından, 63 sayısından başlangıçta eklenen 2 sayısı çıkarılarak 61 sonucuna ulaşılmıştır. MP kodlu kitapta, 10'nun katı olan bir sayıya ulaşılmaya çalışıldığı gibi, 100'e ulaşılmaya çalışılan örnekler de yer almaktadır. Örneğin 86+95 işleminin zihinden hesaplanmasında 86 sayısı 81 ve 5 olarak parçalara ayrılmış, 95 ile 5 toplanarak 100'e ulaşılmış ardından 100 ile 85 toplanarak, işlemin sonucu 185 olarak bulunmuştur.

Kitaplar çıkarma işlemi için yer verilen zihinden hesap stratejileri açısından analiz edildiğinde, Türk kitaplarında 10N ve N10C stratejilerine yer verildiği tespit edilmiştir. Bu stratejilere ek olarak TR1 kodlu kitapta COB stratejisi kullanılmıştır. TAR kodlu Singapur kitabında N10, 10N ve M5,10,100 stratejileri, MP kodlu kitapta ise 1010, N10, M5,10,100 ve N10C stratejilerine yer verilmiştir. Dikkat edilirse, 1010 stratejisi sadece MP kodlu kitapta, N10 ve M10-100 stratejileri ise sadece Singapur kitaplarında yer almaktadırlar. Ayrıca TAR kodlu kitapta, her üç kitapta yer alan N10C stratejisinin olmadığı dikkat çekmektedir. Şekil 7'de TR1 ve TR2 kodlu kitaplarda yer alan içeriklerden örnekler sunulmuştur.



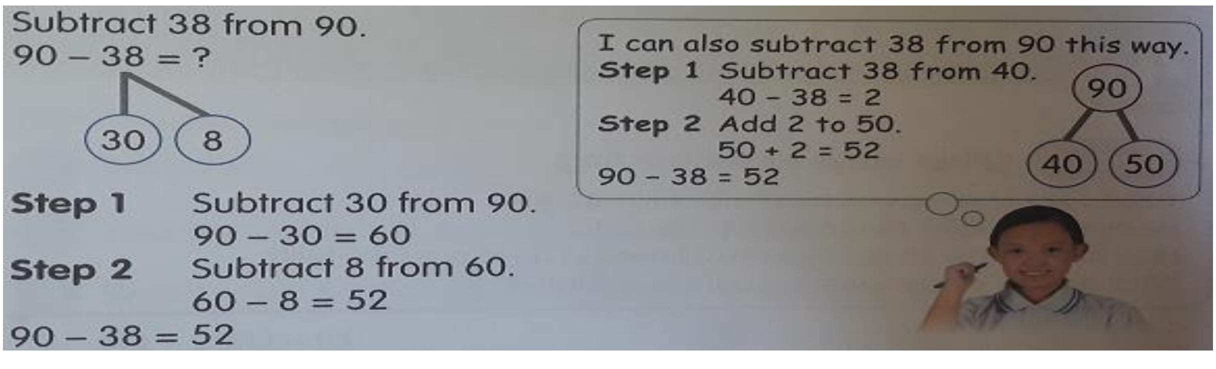
Şekil 7. TR1 kodlu kitapta COB stratejisi (s.63), TR2 kodlu kitapta N10C ve 10N stratejileri (s.57).

Şekil 7'de görüldüğü üzere TR2 kodlu kitapta 78-50 işleminin zihinden hesaplamasında ilk olarak N10C stratejisi kullanılmıştır. 78 sayısı 80'e yuvarlanmış, 80'den 50 çıkarılarak 30 elde edilmiş, son adımda ise başlangıçta eksilen sayıya eklenen 2 sayısı 30'dan çıkarılarak 28 sonucuna ulaşılmıştır. Aynı sorunun zihinden hesaplanmasında kullanılan ikinci strateji 10N'dir. Bu stratejide 78 sayısı öncelikle 70 ve 8 biçiminde onluklarına ve birliklerine ayrılmış ardından 70'den 50 çıkarılarak 20 sayısına ulaşılmış son adımda ise 20 ile 8 toplanarak sonuç 28 olarak bulunmuştur. Bu iki strateji TR1 kodlu kitapta da kullanılmıştır (s.62-63). TR1'de çıkarma işleminin zihinden hesaplanmasında diğer üç kitapta kullanılmayan COB stratejisinin kullanımına yer verilmiştir. TR1 kodlu Türk kitabında 200-40 işleminin sonucuna, 40 sayısının 4 adet onluk içerdiği düşüncesi temel alınarak, 200 sayısından geriye 4 kez onar onar ritmik sayılarak ulaşılmıştır. Geriye ritmik sayma stratejisi ile çıkarma işleminin zihinden hesaplamasına ilişkin örnekler diğer kitaplarda yer almamaktadır. TAR kodlu kitapta, diğer kitaplarda yer alan N10C stratejisinin, MP kodlu kitapta da diğer kitaplarda yer alan 10N stratejisinin olmadığı dikkat çekmektedir. Sadece MP kodlu kitapta 1010 stratejisine yer verilmiştir. Ayrıca Türk kitaplarında yer almayan N10 ve M5,10,100 stratejileri, her iki Singapur kitabında yer almaktadır. TAR ve MP kodlu Singapur kitaplarında çıkarma işleminin zihinden hesabında kullanılan stratejiler Şekil 8'de sunulmuştur.



Şekil 8. TAR'da N10, 10N, M5,10,100 (3A, s.44); MP'de 1010, N10, M10-100, N10C stratejileri (3A, s.69)

Şekil 8'de TAR kodlu kitapta 47-25 işleminin zihinden hesaplanmasında kullanılabilecek üç farklı strateji örneklendirilmiştir. Kitapta ilk strateji olarak N10 stratejisi kullanılmıştır. Bu stratejide 25 sayısı onluklara ve birliklere ayrılarak 20 ve 5 şeklinde parçalanmış ardından 47'den sırasıyla 20 ve 5 çıkarılarak 22 sonucuna ulaşılmıştır. Kullanılan diğer strateji 10N strateji olup, 47 sayısı onluklara ve birliklere ayrılmış, 40'dan 25 çıkarılarak 15 sayısına ulaşılmış ardından 15'e 7 eklenerek 22 sonucu elde edilmiştir. Kitapta kullanılan M5,10,100 stratejisinde, 47 sayısı 45 ve 2 olarak parçalanmıştır. Bu sayede 45'den 25 çıkarıldığında 20 gibi 10'un katı olan bir sayıya ulaşılmış ardından 20'ye 2 eklenerek 22 sonucuna ulaşılmıştır. MP kodlu Singapur kitabında 68-43 işleminin zihinden hesaplanmasında öncelikle 1010 stratejisinin kullanımı örneklendirilmiştir. 68 ve 43 sayıları onluklara ve birliklere ayrılarak onluklar ve birlikler kendi aralarında çıkarılmıştır. Ardından elde edilen 20 ve 3 sayıları toplanarak 23 sonucuna ulaşılmıştır. Aynı işlem N10 stratejisi kullanılarak da yapılmıştır. Bunun için 43 sayısı 40 ve 3 şeklinde parçalara ayrılmış, 68'den 40 çıkarılarak 28 elde edilmiş ardından 28'den 3 çıkarılarak 25 sonucuna ulaşılmıştır. Kitapta yer alan ikinci soruda 81'den 37'nin zihinden nasıl çıkarılacağı örneklendirilmiştir. MP kodlu Singapur kitabında ayrıca 90-38 işleminin zihinden hesaplanmasında N10 stratejisinin kullanımı örneklendirilmiştir (Şekil 9). Bu stratejinin kullanımında öncelikle 38 sayısı 30 ve 8 şeklinde parçalara ayrılmış ardından 90'dan 30 çıkarılarak 60 sayısı elde edilmiş, bir sonraki adımda 60 sayısından 8 çıkarılarak 52 sonucuna ulaşılmıştır. Aynı kitapta 90-38 işlemi için diğer kitaplarda yer almayan "shortcut" şeklinde isimlendirilen bir yöntem kullanılmıştır. Bu stratejide eksilen sayının parçalara ayrılmasında, parçalardan biri, çıkan sayıya en yakın ve çıkan sayıdan büyük ve 10 sayısının katı olan bir sayı olarak seçilmiştir. Bu yüzden 90-38 işleminde 90 sayısı 40 ve 50 şeklinde parçalara ayrılmış, ardından 40'dan 38 çıkarılarak 2 elde edilmiş, son adımda ise 50 ile 2 toplanarak 52 sonucuna ulaşılmıştır.

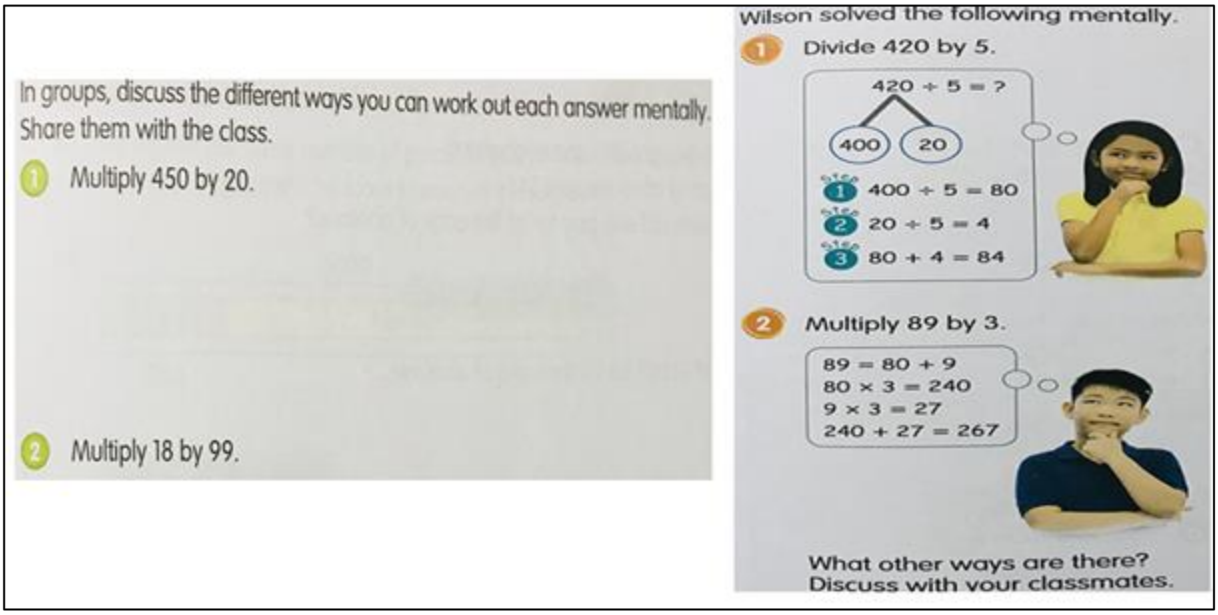


Şekil 9. MP kodlu kitapta çıkarma işleminin çözümünde kullanılan N10 stratejisi (3A, s.70).

3.2. Ders Kitaplarında Yer Verilen Zihinsel Hesap Stratejileri: Çarpma ve Bölme İşlemleri

Singapur kitaplarında çarpma işleminin zihinden hesaplanmasında N10 ve N10C stratejileri 2. sınıfta verilmeye başlanmış, bir sayıyı onun kuvvetleri ile çarpma ve bölme stratejileri ise 5. sınıfta verilmiştir. 2, 3, 4, 5, 10 ile zihinden çarpma Singapur'da 2. sınıfın birinci döneminde, 6, 7, 8 ve 9 ile çarpma ise 3. sınıfın birinci döneminde öğretilmektedir. Singapur ders kitaplarında, N10 ve N10C stratejilerinin öğretiminde küme modellerinden yararlanılmıştır. Türkiye'de 2. sınıfta 1, 2, 3, 4 ve 5 ile çarpma, 3.sınıfta 6, 7, 8, 9 ile çarpma, 4. sınıfta 10 ve 100 ile kısa yoldan çarpma konularına değinilmiştir. Türk kitaplarında ise çarpma ve bölme işlemlerinde zihinden hesap stratejilerine 4. sınıfta değinilmiştir. Dikkat çekici diğer bir bulgu, TR3 kodlu Türk kitabında, zihinden çarpma ve bölme işlemi konusu içerisinde sadece bir sayının 10'un kuvvetleri ile zihinden nasıl çarpılacağı ve bölüneceği üzerinde durulmuş olması ve N10, N10C gibi stratejilere değinilmemiş olmasıdır.

TR3 kodlu ders kitabında öğrencilerden zihinden hesaplama gerektiren sorularda kendilerinin farklı bir strateji geliştirmeleri istenmemiştir. Öğrencilerden verilen sayıları, 10'un kuvvetleriyle kısa yoldan çarpmaları (TR3, s. 83), $ax10^n$ tipindeki sayıları 10'un kuvvetlerine zihinden bölmeleri (TR3, s.99) istenmiştir. TR3 kodlu kitabın aksine, MP ve TAR kodlu Singapur kitabında yer alan alıştırma sorularında öğrencilerin çarpma ve bölme işlemlerinin zihinden hesaplanmasında kullanılabilecek farklı yolları tartışmaları istenmiştir. Ancak bu iki Singapur kitabında da, öğrencilerin icat ettikleri stratejiler arasında işlemin zihinden hesabı için kullanımı en uygun stratejinin hangisi olması gerektiğini düşünmelerine ve akranlarıyla tartışmalarına yönelik bir içeriğe yer verilmediği tespit edilmiştir. Şekil 10'da bu durumu ortaya koymaktadır. Her iki Singapur kitabında da Türk kitabında olduğu gibi bir sayının 10'un kuvvetlerine zihinden bölme işlemi ile ilgili alıştırma sorularına yer verilmiştir.



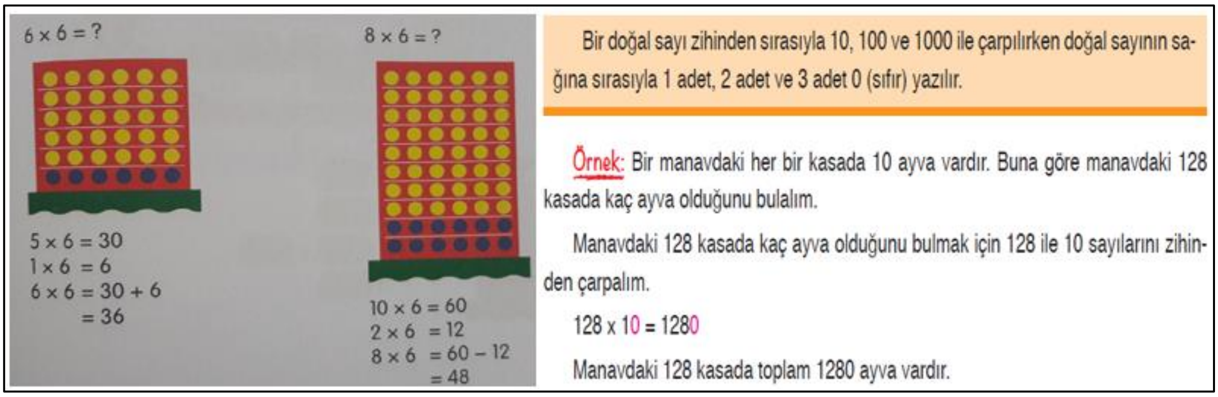
Şekil 10. TAR ve MP kodlu kitapta çarpma işleminin zihinden hesaplanmasında öğrencileri farklı stratejiler kullanmaya ve stratejilerini arkadaşlarıyla tartışma teşvik eden içerik (TAR 4A, s. 65; MP 4A, s. 71).

TAR kodlu kitapta öğrencilerden 450x20, 18x99 ve 6480x8 işlemlerini grup arkadaşlarıyla tartışarak farklı yollar icat ederek zihinden yapmaları beklenmektedir. MP kodlu kitapta ise 420:5 ve 89x3 işlemlerinde N10 stratejisinin kullanımı örneklendirilmiştir. Aşağıda Türk ve Singapur ders kitaplarında, çarpma ve bölme işlemleri için kullanılan zihinsel hesap stratejilerinin neler olduğuna değinilmiş ve ders kitabındaki içerikten alıntılara yer verilmiştir.

Tablo 4. Ders Kitaplarında, Çarpma ve Bölme İşlemlerinin Çözümünde Kullanılan Hesap Stratejileri

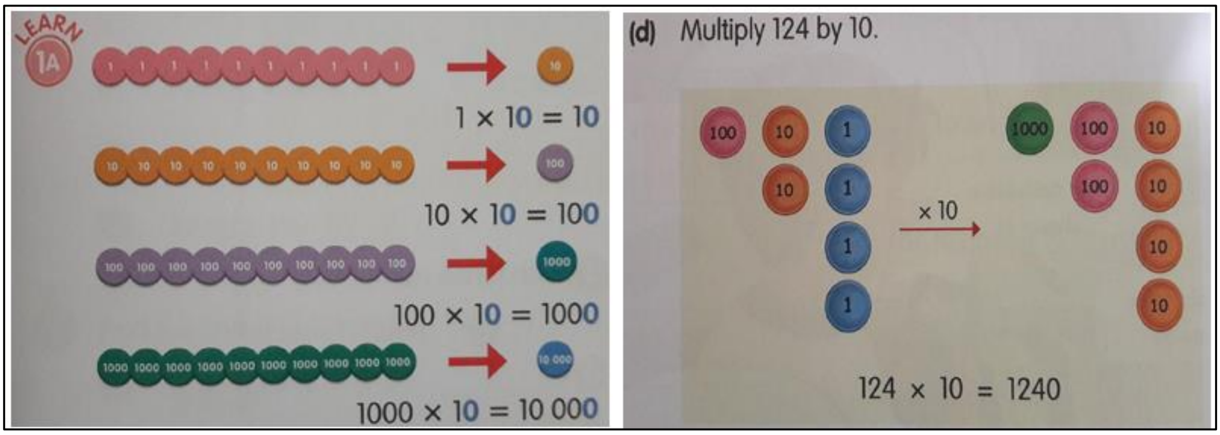
Strateji	Çarpma İşlemi			Bölme İşlemi		
	TR3	TAR	MP	TR3	TAR	MP
COB						
1010						
N10C		x	x			
N10		x	x		x	x
10^n	x	x	x	x	x	x
GCN						

MP ve TR3 kodlu kitaplarda zihinden çarpma işlemi konusunun içerisinde yer alan içerikten kesitler Şekil 11'de sunulmuştur.



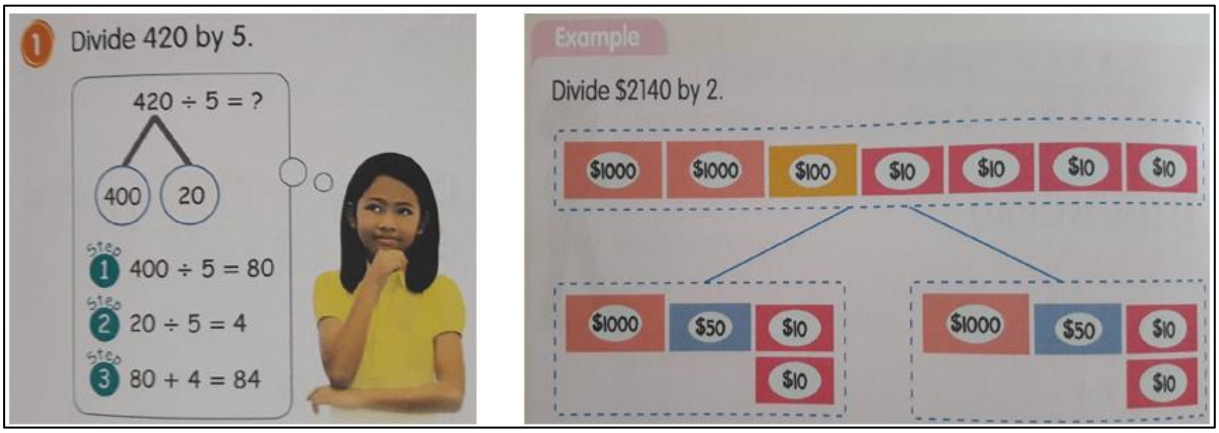
Şekil 11. MP ve TR3'de çarpma işleminin çözümünde kullanılan stratejiler (MP, 3A, s.85; TR3, s.82)

Şekil 11, MP kodlu üçüncü sınıf matematik ders kitabında 6x6 işleminin sonucunun parçalara ayırma stratejisi ile nasıl yapıldığını göstermektedir. N10 stratejisinde $6x6$, $(5+1)x6$ şeklinde yazılmış ve bu sembolik temsile ilişkin görsel hemen yukarısında verilmiştir. Bu sayede öğrencilerin parçalara ayırma stratejisinin anlamını kavramaları sağlanmaya çalışılmıştır. Benzer örneklere TAR kodlu Singapur kitabında da yer verilmiştir (TAR 3A, s.68-69). TR3 kodlu Türk kitabında bir sayı sırasıyla 10, 100, 1000 ile çarpılırken doğal sayının sağına sırasıyla 1, 2, ve 3 adet sıfır yazılması gerektiği belirtilmiştir. TR3 kodlu kitapta doğrudan kurallar verilerek öğrencilerin zihinden çarpma işlemleri yapmalarının amaçlandığı söylenebilir. 10'un kuvvetleri ile zihinden çarpma işlemi, Türkiye'de 4. sınıfta öğretilirken, Singapur'da bir yıl gecikmeli olarak öğretilmektedir. Şekil 11'de öğrencilere bir sayının 10'un kuvvetleri ile kısa yoldan çarpımında sayının sonuna 10'un kuvveti kadar sıfır atılacağı vurgulanmıştır. Singapur kitaplarında, Türk kitabında olduğu gibi doğrudan kural vermek yerine, görsel modellerden yararlanılmış, öğrencilerin örüntü bularak kuralı kendilerinin ifade etmeleri amaçlanmıştır. Bu durumu ortaya koyan içerik Şekil 12'de verilmiştir.



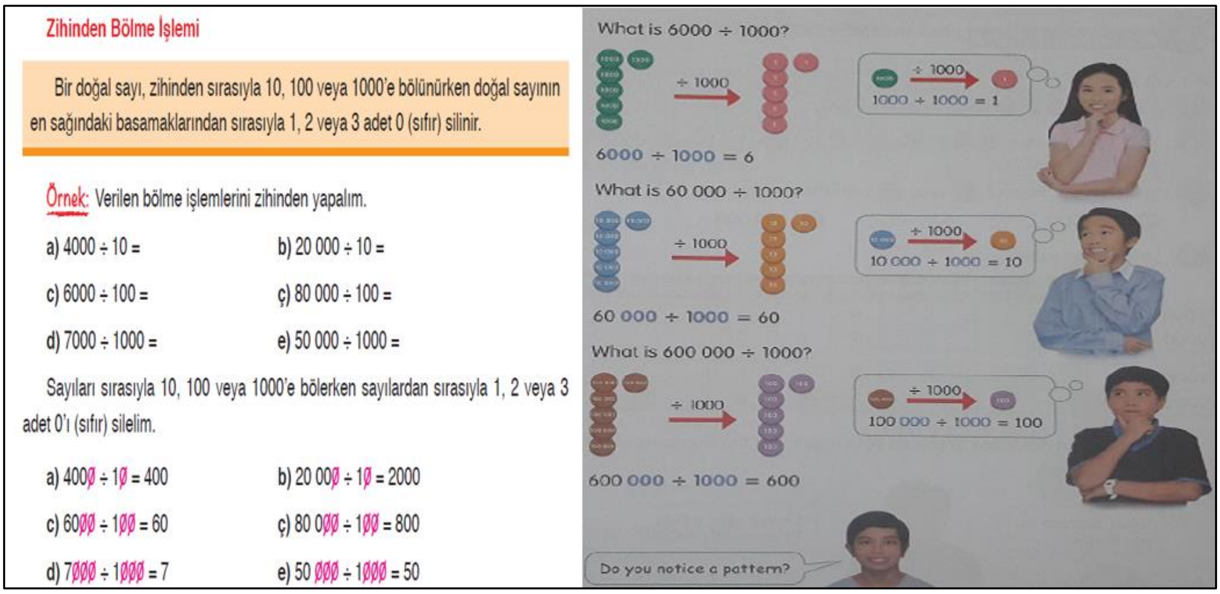
Şekil 12. MP ve TAR'da bir sayının 10 ile çarpımına ilişkin model (MP, 5A, s.17, TAR, 5A, s.14).

MP kodlu kitapta kullanılan görsel unsurlar çarpmanın tekrarlı toplama anlamına vurgu yapmaktadır. Kitapta, öğrencilerden oluşan örüntüyü ve kuralı bulmaları beklenmektedir. Bu görselin hemen altında 4538x10, 500x100 vb. işlemler sayma pulları ile modellenmiş ardından öğrencilere "modeldeki örüntüyü farkettiniz mi" şeklinde bir soru yöneltilerek öğrencilerden 10'un kuvvetleri ile zihinden çarpma işleminin kuralını keşfetmeleri beklenmiştir. TAR kodlu kitapta, 10 ile çarpılacak sayı parçalara ayrılmış ardından her bir parça 10 ile çarpılarak (N10) sonuca ulaşılmıştır. MP kodlu Singapur kitabında bölme işleminin zihinden hesaplanmasında N10 stratejisinin kullanımı örneklerle açıklanmıştır. Şekil 13'de kitapta yer alan bir örnek verilmiştir.



Şekil 13. MP ve TAR kodlu kitapta PA stratejisi (MP, 4A, s.71; TAR, 4A, s.64)

MP kodlu dördüncü sınıf matematik ders kitabında 420:5 işleminin sonucunun N10 stratejisi ile nasıl bulunacağı verilmiştir. 420 sayısı 400 ve 20 şeklinde parçalara ayrılarak, sırasıyla bu sayılar 5 ile bölünmüş, elde edilen 80 ve 4 toplanarak 84 sonucuna ulaşılmıştır. Bölme işleminin sonucuna ulaşmak için N10 stratejisinin kullanımına TAR kodlu kitapta da yer verilmiştir. TAR kodlu dördüncü sınıf matematik ders kitabında 2140:2 işleminin sonucunun parçalara ayırma stratejisi ile nasıl bulunacağı verilmiştir. 2140 sayısı 1000, 1000, 100, 10, 10,10, 10 şeklinde parçalara ayrılarak, sırasıyla bu sayılar 2 ile bölünmüştür. Türk ders kitabında sadece bir sayının 10'nun kuvvetlerine zihinden nasıl bölüneceği bir kural verilerek ifade edilmiştir. Türk ders kitabında bir sayı 10'un kuvvetlerine bölünürken, bölen sayı içerisinde ne kadar sıfır varsa sayıdan o kadar sıfır atılması gerektiği ifade edilmiştir. Dolayısıyla Türk ders kitaplarında doğrudan bir kural verilerek bölme işleminin zihinden nasıl yapılacağına temas edilmiş olmasına karşın, MP kodlu Singapur kitabında doğrudan kural vermek yerine, görsel unsurlardan yararlanılmış, öğrencilerin örüntü bularak kuralı kendilerinin ifade etmeleri amaçlanmıştır. TAR kodlu kitapta, çarpma işleminde olduğu gibi 10'un kuvveti olan bir sayıya bölünecek olan sayı öncelikle parçalara ayrılmış ardından her bir parça ilgili sayıya bölünerek sonuca ulaşılmıştır (TAR, 5A, s.21-24). Şekil 14'de kitaplardan alınan örnekler verilmiştir.



Şekil 14. TR3 kodlu kitapta bir sayıyı 10'un kuvvetlerine kısa yoldan bölme (tr, s.97). mp kodlu kitapta bir sayının 10'un kuvvetleriyle bölünmesine ilişkin model (mp, 5a, s.31).

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada Türk ve Singapur ders kitapları, aritmetik işlemlerde zihinden hesap stratejileri konusunun içeriği açısından karşılaştırılmıştır. Her iki ülkenin 3. sınıf ders kitabında toplama ve çıkarma işleminin zihinden hesaplanması konusuna yer verilmiştir. Tüm kitaplarda bu konuya 3 sayfa yer ayrılmıştır. TR1 kodlu Türk kitabı ile TAR kodlu Singapur kitaplarında zihinden toplama ve çıkarma işlemlerinin zihinden hesaplanması konularına, doğrudan strateji öğretimi ile başlanmıştır. TR2 kodlu Türk kitabı ile MP kodlu Singapur kitaplarında ise diğer iki kitaptan farklı olarak, bağlamsal bir problem verilerek konuya başlanmış, öğrencilerden problemi farklı stratejiler icat ederek çözmeleri istenmiştir. Literatürde zihinden hesap stratejilerinin öğretimine yönelik iki farklı görüş vardır. Bu görüşlerden ilkinde, öğrencilerin önceki deneyimleri ve bilgi yapılarının farklılığından ötürü, zihinden hesap stratejilerinin doğrudan öğretilmesi gerektiği savunulmaktadır. Cooper, Heirdsfield ve Irons (1996), zihinden hesap yapma becerisi zayıf öğrencilerin belirlenmesi ve bu tip öğrencilere zihinden hesap stratejilerinin doğrudan öğretilmesi gerektiği görüşünü paylaşmışlardır. Klein, Beishuizen ve Treffers (1998), toplama ve çıkarma problemlerini çözme konusunda yetersiz olan öğrencilerin, problemleri çözmek için zihinden hesap stratejilerini kullanmada öğretmen desteğine ihtiyaç duyduklarını belirtmişlerdir. Zihinden hesap stratejilerinin öğretimine yönelik ikinci görüşü savunanlar, zihinden hesap stratejilerini doğrudan öğretmek yerine, öğrencilerin önceki bilgilerini (sayı örüntüleri, on tabanlı sayı sistemi vb.) kullanarak stratejileri kendilerinin icat etmeleri gerektiğine işaret etmişlerdir. Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema ve Empson'e göre (1998), doğrudan zihinden hesap stratejilerinin öğretimi, öğrencileri bu stratejilere mekanik bir kural olarak başvurma tehlikesiyle karşı karşıya getirmektedir. Dolayısıyla, öğrencileri kullandıkları zihinden hesap stratejilerini tartışmaya ve bir problemin çözümünde kullanılabilecek zihinsel hesap stratejilerinin neler olabileceği üzerine düşünmeye teşvik etmek, öğrencilerin daha etkili çözüm stratejileri geliştirmelerine yardımcı olacaktır (Yang ve Huang, 2013). Bu iki görüşün kendi içerisinde tutarlı tarafları olmakla birlikte, ders kitaplarında zihinden hesaplama konusuna doğrudan strateji öğretimi ile başlamak yerine, TR2 ve MP kodlu kitaplarda olduğu gibi bağlamsal bir problem ile başlanabilir. Bu sayede, zihinden hesap stratejilerini icat edemeyen öğrenciler ve bu öğrencilerin strateji icat etme konusunda yaşadıkları zorlukların nedenleri belirlenerek gerekli önlemler alınabilir. Doğrudan strateji öğretimi ile konuya girişin yapıldığı, TR1 ve TAR kodlu kitaplarda, konu bitiminde öğrencilere toplama ve çıkarma işlemleri verilerek, öğrencilerin farklı stratejiler kullanarak alıştırmaları zihinden yapmaları istenmiştir. Ancak konuya giriş kısmına böyle bir uygulama ile başlanmayıp, strateji öğretimi yapıldıktan sonra böyle bir uygulamanın yapılması, öğrencilerin öğrendikleri stratejilerden etkilenerek farklı strateji icat etmeleri önünde engel oluşturabilir. Nitekim, Blote, Klein ve Beishuizen (2000), çalışmasında öğrencilere toplama ve çıkarma işlemlerinin zihinden hesaplanmasında öncelikle (N10), ardından (1010) stratejilerinin kullanımını öğretmişlerdir. Öğrenciler başlangıçta N10 stratejisi ile işlemleri yaparken, 1010 strateji öğretildikten sonra öğrencilerde bu stratejiyi kullanmaya yönelik eğilim artmıştır. Bu sonuçlar sınıf bağlamının öğrencilerin strateji tercihlerini etkileyen bir faktör olduğunu ortaya koymaktadır. Benzer sonuçlar Türkiye'de yapılmış olan çalışmalarda da ortaya çıkmıştır (Duran, Doruk ve Kaplan, 2016; Güç ve Karadeniz, 2016).

Kitaplarda yer alan stratejiler analiz edildiğinde, TR1 kodlu kitapta toplama işleminin zihinden hesaplanmasında üç stratejiden (1010, N10, ND), TR2 kodlu kitapta toplama işleminin zihinden hesaplanmasında dört stratejiden (COB, 1010, N10, 10N) bahsedilmiştir. Dikkat edilirse Türk kitaplarında toplama işlemi için 1010 ve N10 stratejilerinin ortak olarak yer verilen stratejilerdir. Öğrenciler, zihinden toplama ve çıkarma işlemlerinde, sıklıkla 1010 ve N10 stratejilerini kullanmaktadırlar (Varol ve Farran, 2007). Murphy (2004) çalışmasının başlangıcında öğrencilerin kullandıkları zihinden hesap stratejilerinin neler olduğunu belirlemek istemiştir. Öğrencilerin toplama ve çıkarma işlemlerini zihinden yaparken sadece 1010 ve COB stratejilerine başvurduklarını tespit etmiştir (Buzeika, 1999). Toplama işleminin zihinden hesabında 1010 ve N10 stratejileri sadece MP kodlu Singapur kitabında yer almaktadır. Bu stratejiler dışında Türk ders kitaplarında toplama işleminin zihinden hesaplanmasında yer verilmeyen M5,10,100 ve N10C stratejileri Singapur ders kitaplarında örneklerle açıklanmaktadır. M5,10,100 stratejisinde toplanan sayılardan biri, 1010, N10 ve 10N stratejisinin aksine, 5, 10 ve 100'ün katını elde edecek biçimde parçalanmaktadır. N10C stratejisinde ise toplanan sayılardan biri 10 veya 100'e tamamlanmakta ardından elde edilen toplam uygun şekilde düzenlenmektedir. Örneğin M5,10,100 stratejisinde 86+95 işlemi yapılırken, 95 sayısını yüze tamamlamak amacıyla, 86 sayısı 81+5 şeklinde yazılmaktadır. Aynı işlem N10C stratejisi ile yapılırken 95 sayısı 100 olarak düşünülerek 100 ile 86 toplamı 186 bulunacak ardından 186'dan 5 çıkarılarak 181 sonucuna ulaşılacaktır. Bu sayede zihinden toplama işlemi sürecinde öğrenciler 10 ve 100 ile toplama işlemi yapmanın kolaylığını öğrenmiş olacaklar, bir sayıyı uygun sayı ikilisinin toplamı biçiminde yazma konusunda ve sayıları düzenleme konusunda deneyim kazanacaklardır. Özellikle toplama işlemini zihinden yaparken, sayıları uygun şekilde düzenleme konusunda deneyim kazanan öğrenciler, 128+86=83+? türündeki sorularda, eşitliğin çözümünü uzun işlem adımlarıyla yapmak yerine, sayıları uygun şekilde düzenleyerek sonuca ulaşabileceklerdir (86, 83'un 3 fazlası, o halde 128'in 3 eksiği olan 125 sonucu verir). Sonuç olarak toplama işleminin zihinden hesaplanmasında stratejisi çeşitliliği açısından en zengin kitabın MP kodlu kitap olduğu söylenebilir. Türk ders kitaplarında toplama işleminin zihinden hesaplanmasında M5,10,100 ve N10C stratejisine yer verilmesi, öğretmenlerin bu stratejisinin nasıl kullanılması gerektiğini öğrenmelerini sağlayarak, öğrencileri farklı zihinden hesap stratejilerinin kullanımı konusunda cesaretlendirmelerinde yardımcı olacaktır. Nitekim, ders kitaplarında yer verilen ve öğretmenler tarafından bilinen zihinden hesap stratejileri, öğrenciler tarafından da sıklıkla kullanılmaktadır. Amerika'da öğrencilere erken yaşlardan itibaren toplama işlemini yaparken 1010 stratejisi öğretildiğinden öğrenciler toplama işlemini zihinden yaparken bu stratejiyi kullanmayı tercih etmektedirler (Blote, Klein ve Beishuizen, 2000; Heirdsfield ve Cooper, 2004). Benzer şekilde Duran, Doruk ve Kaplan (2016), toplama işleminde Türk öğrencilerin en fazla COB ve 1010 stratejisini kullandıklarını, en az ise M5,10,100 stratejisini kullandıklarını tespit etmişlerdir.

Çıkarma işleminin zihinden hesaplanmasında TR1 kodlu kitapta üç stratejinin (COB, 10N, N10C) kullanımı, TR2 kodlu kitapta ise iki stratejinin (10N, N10C) nasıl kullanılacağı örneklerle açıklanmıştır. TAR kodlu Singapur kitabında çıkarma işleminin zihinden hesaplanmasında (N10, 10N ve M5-10-100), MP kodlu Singapur kitabında ise (1010, N10, SC, M5-10-100 ve N10C) stratejilerinin kullanımına ilişkin örneklere yer verilmiştir. Sonuç olarak toplama işleminde olduğu gibi çıkarma işleminin de zihinden hesaplanmasında stratejisi çeşitliliği açısından en zengin kitap MP kodlu kitaptır. Toplama işleminde olduğu gibi M5-10-100 stratejisine sadece Singapur kitaplarında yer verilmiştir. SC stratejisinin nasıl kullanılacağına sadece MP kodlu kitapta değinilmiştir. SC stratejisi çıkarma işleminin zihinden hesaplanmasında başvurulabilecek etkili bir yoldur ve hata riskini önemli ölçüde azaltmaktadır. Örneğin, 74-28 işleminde 74 sayısı 28'e en yakın ve 28'den büyük onluk elde edilecek şekilde parçalandığında, parçalar 44 ve 30 olacaktır. 30'dan 28 çıkarılarak 2 elde edilecek ardından 44'e 2 eklenerek 46 sonucuna ulaşılacaktır. Sinpagur kitaplarında yer alan, Türk kitaplarında yer almayan diğer strateji N10 stratejisidir. Avrupa ülkelerinde çıkarma işleminin zihinden hesaplanmasında N10 stratejisi tercih edilmektedir. Çünkü bu stratejinin kullanımı ile öğrencilerin hata yapma riskinin daha az olacağı düşünülmektedir (Heirdsfield ve Cooper, 2004; Klein ve Beishuizen, 1994). Blote, Klein ve Beishuizen (2000), Hollandalı 2. sınıf öğrencilerine toplama ve çıkarma işlemlerinin zihinden hesaplanmasında 1010 ve N10 stratejilerinin nasıl kullanılacağını öğretmiştir. Öğrencilerin toplama ve çıkarma işlemlerini zihinden hesaplarken N10 stratejisini kullanmayı tercih ettiklerini tespit etmişlerdir. Bu açıdan Türk ders kitaplarında bu stratejiye de yer verilmesi faydalı olabilir.

Singapur'da kullanılan ilkokul matematik ders kitaplarında çarpma işleminin zihinden hesaplanmasına ait içeriğe 2. sınıfta, Türk ders kitabında (TR3) ise 4. sınıfta yer verilmiştir. Dolayısıyla, Türkiye'de ilkokul öğrencilerin Singapurlu öğrencilere göre iki yıl gecikmeli olarak çarpma işleminde zihinsel hesabın varlığından haberdar edildikleri söylenebilir. Bu önemli bulgu dışında, Türk ders kitabında sadece bir sayının 10'nun kuvvetleri ile nasıl çarpılacağına ilişkin kural ve örneklere yer verilmiştir. Türk kitabında çarpma işleminin zihinden hesaplanması konusunda bir sayı 10, 100, 1000 ile çarpılırken, sağına sırasıyla 1, 2, 3 sıfır atılması gerektiğine temas edilmiştir. Böyle bir açıklama öğrencilerin ilerleyen yıllarda 1,2 gibi bir sayıyı 100 ile çarparken hatalar yapmalarına sebebiyet verebilecek türden bir açıklamadır. Singapur kitaplarında çarpma işleminin zihinden hesaplanmasında N10 ve N10C stratejileri 2. sınıfta verilmeye başlanmıştır. Singapur kitaplarında bir sayıyı onun kuvvetleri ile çarpma ve bölme stratejileri ise 5. sınıfta verilmektedir. Ayrıca, N10 ve N10C stratejilerinin öğretiminde küme modellerinden yararlanılmıştır. Sonuç olarak Türk öğrenciler, Singapurlu öğrencilere göre zihinden çarpma işlemini iki yıl gecikmeli olarak öğrenmekle birlikte, çarpma işleminin kavramsal anlamı üzerine oturtulmuş farklı zihinden hesap stratejilerini kullanabilme imkanına sahip olamamaktadırlar. Ayrıca Türk kitaplarında bir sayının 10'un kuvvetleri ile kısa yoldan çarpımının nasıl yapılacağının bir kural olarak verilmesi de bir eksiklik olarak düşünülebilir. Nitekim Singapur kitaplarında bir sayının 10'un kuvvetleri ile çarpımında çarpmanın tekrarlı toplama anlamına değinilmiş ve sayılar parçalara ayrılarak her bir parça 10'un kuvvetleri ile çarpılmıştır. Ardından, öğrencilerden ortaya çıkan örüntüyü keşfetmeleri istenmiştir. Dikkat edilirse Türk ders kitabında öğrencilere doğrudan kural verilmişken, Singapur kitaplarında öğrencilerin kuralı keşfetmeleri beklenmektedir.

Çarpma işleminde olduğu gibi bölme işleminin zihinden hesaplanmasında da, TR kodlu 4. sınıf matematik ders kitabında sadece bir sayının 10'nun kuvvetlerine kısa yoldan nasıl bölüneceği bir kural verilerek ifade edilmiştir. MP ve TAR kodlu ders kitaplarında bölme işleminin zihinden hesaplanmasında N10 stratejisinin kullanımı örneklerle açıklanmıştır. Bunun dışında 5. sınıf Singapur kitaplarında bir sayının 10'nun kuvvetlerine zihinden nasıl bölüneceği bir kural olarak verilmek yerine, görsel unsurlardan yararlanılmış, öğrencilerin örüntü bularak kuralı kendilerinin ifade etmeleri amaçlanmıştır. TAR kodlu kitapta, çarpma işleminde olduğu gibi 10'un kuvveti olan bir sayıya bölünecek olan sayı öncelikle parçalara ayrılmış ardından her bir parça ilgili sayıya bölünerek sonuca ulaşılmıştır. Öğrencilerin ortaokul yıllarında çarpma ve bölme işlemlerini zihinden hesaplama becerisine sahip olabilmesi, ilkokul yıllarında N10 ve N10C gibi çarpma ve bölme işlemlerinin kavramsal anlamları üzerine oturtulmuş stratejileri kullanabilmelerine, farklı stratejileri icat ederek, icat ettikleri stratejileri arkadaşlarıyla tartışabilmelerine bağlıdır. Bu yönlerden Singapur ders kitaplarının, TR3 kodlu Türk ders kitabına göre öğrencilere daha fazla öğrenme fırsatları sunduğu söylenebilir. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, ders kitaplarının öğrencilerin zihinden hesap stratejilerini icat edebilmelerine yönelik uygulamalarla (bağlamsal problem, uzunluk, alan, küme modelleri vb.) zenginleştirilmesi, farklı sayılarla kurulan çarpma ve bölme işlemlerinde hangi stratejinin kullanımının uygun olacağı konusunda öğrencilere uygulamalar yaptırılması faydalı olabilir. Bu sayede öğrencilerin zihinden hesaplama stratejilerini öğrenmelerine, çarpma ve bölme işleminin zihinden hesaplanmasında kullanılabilecek en uygun stratejiye karar verebilmelerine fırsat yaratılmış olacaktır.

Tüm kitaplarda öğrencilerden, aritmetik işlemleri zihinden yaparken farklı stratejiler kullanmaları beklenmektedir. Ancak ders kitaplarında, öğrencilerin icat ettikleri stratejiler arasında, işlemin zihinden hesaplanmasında kullanımı en uygun stratejinin hangisi olması gerektiğini düşünmelerine ve akranlarıyla tartışmalarına yönelik bir içeriğe yer verilmemiştir. Ders kitaplarında, öğrencilere bu soruyu zihinden yaparken hangi stratejiyi kullanmayı tercih ederdiniz? Neden bu stratejiyi seçtiniz açıklayınız ve arkadaşlarınızla tartışınız? şeklindeki sorular öğrencilerin kendi stratejilerini değerlendirmelerine ve sorunun zihinden hesaplanmasında farklı stratejilerin kullanılıp kullanılamayacağı ile ilgili sorgulayıcı olmalarına zemin hazırlayacaktır. Nitekim, yapılan çalışmalar, öğrencilerin işlemde yer alan sayıları dikkate almadan, strateji seçimine gittiklerini ortaya koymaktadır (Güç ve Karadeniz, 2016; Torbeys ve Verschaffel, 2016; Duran, Doruk ve Kaplan, 2016). Örneğin 457-298 işleminin zihinden hesaplanmasında N10C stratejisinin kullanımı diğer stratejilerin kullanımına nazaran daha etkilidir. Çünkü bu stratejiyle öğrenciler daha hızlı ve hatasız şekilde doğru sonuca (457-300=157, 157+2=159) ulaşabilmektedirler (Torbeys ve Verschaffel, 2016). Bu bakımdan ders kitaplarının zihinden hesap stratejilerinin kullanımı konusunda zenginleştirilmesi, çeşitli sayılarla kurulan aritmetik işlemlerinin zihinden hesaplanmasında hangi stratejinin kullanımının uygun olacağı konusunda uygulamalara yer verilmesi faydalı olacaktır. Bu sayede öğrencilerin zihinden hesaplama stratejilerini öğrenmelerine ve aritmetik işlemlerin zihinden hesaplanmasında kullanılabilecek en uygun stratejiye karar verebilmelerine fırsat yaratılmış olabilir.

Genel olarak değerlendirildiğinde, Singapur kitaplarının aritmetik işlemlerin zihinden hesaplanması konusunda öğrencilere daha fazla öğrenme fırsatı sağladığı söylenebilir. Elde edilen bu sonuçlar, ilerleyen yıllarda yapılacak uluslar arası sınavlarda (sayılar ve işlemler öğrenme alanında), Singapurlu öğrencilerin Türk öğrencilerine kıyasla daha iyi bir performans gösterebileceklerine işaret etmektedir. Ancak, bu çalışmada elde edilen sonuçların genellenebilirliği konusunda dikkatli olunmalıdır. Çünkü öğretmenlerin öğrenme-öğretme sürecindeki rolü dikkate alındığında (Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen ve Doorman, 2015; Yang, 2018) ders kitaplarının içeriğinin eksiksiz bir şekilde hazırlanması bile, etkili bir matematik öğretimi için tek başına yeterli görülmeyebilir. Çünkü öğrencilerin matematik başarılarını etkileyen bir çok faktör (anne baba eğitim düzeyi, evdeki eğitsel kaynak sayısı, öğretmen rolü vb.) vardır. Çok iyi hazırlanmış veya hazırlanmamış bir ders kitabı, donanımlı bir öğretmenin elinde hayat bulacaktır. Bu açıdan, ileride yapılan çalışmalarda, öğretmelerin zihinden hesaplama konusunda; ders kitabından nasıl yararlandıkları, konuya nasıl giriş yaptıkları ve ne tür uygulamalara yer verdikleri araştırılabilir.

Kaynaklar / References

Askew, M., Bibby, T., & Brown, M. (1997). *Raising Attainment in Primary Numeracy*. King's College, London.

Aydın, Güç, F., & Hacısalihoğlu Karadeniz, M . (2016). Ortaokul öğrencilerinin kullandıkları zihinden toplama işlemi yapma stratejilerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *17*(3), 621-637.

Beaton, A. E., Mullis, I. V., Martin, M. O., Gonzales, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1996). *Mathematics achievement in the middle school years: IEA's third international mathematics and science study*. Boston, MA: Center for the study of testing, evaluation, and educational policy.

Beishuizen, M., & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch ideas. *British Education Research Journal*, *24*(5), 519-538.

Beishuizen, M. (1999). The empty number line as a new model. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 157-168). Buckingham: Open University Press.

Blote, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental Computation and Conceptual Understanding. *Learning and Instruction*, *10*(3), 221-47.

Buys, K. (2001). Mental arithmetic. In M. Van den Heuvel (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121–146). Utrecht: Freudenthal Institute, University of Utrecht.

Buzeika, A. (1999). Invented algorithms: Teachers face the challenge. In J. M. Truran & K. M. Truran (Eds.), *Making the difference* (pp. 128-134). Sydney: MERGA.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 3–20.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A. M., & Irons, C. J. (1996). Children's mental strategies for addition and subtractionword problems. In J. Mulligan&M. Mitchelmore (Eds.), *Children's number learning* (pp. 147–162). Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.

DES (1991). *Mathematics in the national curriculum*, HMSO, London.

DfE (1995). *Key stages 1 and 2 of the national curriculum*, HMSO, London.

DfEE (1999). *The national numeracy framework for teaching mathematics from reception to year 6*, DfEE, London.

Duran, M., Doruk, M., & Kaplan, A. (2016). Ortaokul öğrencilerinin zihinden hesaplama yaparken kullandıkları stratejiler (The Strategies Used by Middle School Students to Make Mental Computation), *Elementary Education Online*, *15*(3), 742-760.

Erbaş, A. K., Alacacı, C., & Bulut, M. (2012). Türk, Singapur ve Amerikan matematik ders kitaplarının bir karşılaştırması [A Comparison of Mathematics Textbooks from Turkey, Singapore and the United States of America]. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *12*, 2311 – 2329.

Gray, E. (1997). 'Developing a flexible interpretation of symbols', in I. Thompson (ed.), *Teaching and learning early number* (pp.63-72). Open University Press, Great Britain.

Heirdsfield, A. N. (2000). Mental computation: Is it more than mental architecture? Paper presented at Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education, Sydney. Retrieved November, 12, 2006 from ttp://www.aare.edu.au/00pap/hei00259. htm.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004a). Inaccurate mental addition and subtraction: causes and compensation. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26*, 43–65.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004b). Factors affecting the process of proficient mental addition and substruction: case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 443-463.

Heirdsfield, A. M. (2006). One teacher's role in promoting understanding in mental computation. In H. L. Chick & J. L. Vincent, (Eds), *Proceedings of the 29th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-120). Melbourne: PME.

Heirdsfield, A. M., & Lamb, J. T. (2006). Teacher actions: Enhancing the learning of mental computation in year 2. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3–281). Prague, Czech Republic: PME.

Kamii, C., Lewis, B., & Livingston, S. J. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *The Arithmetic Teacher*, *41*(4), 200–2003.

Kar, T., & Işık, C. (2015). Comparison of Turkish and American seventh grade mathematics textbooks in terms of addition and subtraction operations with integers. *Education and Science*, *40*(177), 75-92.

Kar, T., Güler, G., Şen, C., & Özdemir, E. (2018). Comparing the development of the multiplication of fractions in Turkish and American Textbooks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 200-226.

Klein, T., & Beishuizen, M. (1994). Assessment of flexibility in mental arithmetic. In J. E. H. Luit (Ed.), *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary schools*. (pp. 125-152). Doetinchem, The Netherlands: Graviatt.

Klein, A. S., Beishuizen,M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 443–464.

Lemonidis, C. (2015). *Mental computation and estimation: implications for Mathematics Education Research, Teaching and Learning*. Routledge.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education*, *24*(2), 145-154.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1997). Mental computation in the middle Grades: the importance of thinking strategies. *Mathematics in the Middle School*, *2*(5).

McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school Mathematics* (pp. 44–48). Reston, VA: NCTM.

Moyo, K. M., & Samson, C. (2014). Exploring mental computation strategies. *Learning and Teaching Mathematics*, 17(1), 38-41.

Murphy, C. (2004). How do children come to use a taught mental calculation strategy?. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(1), 3-18.

Mullis I. V. S., Martin, M. O., Gonzales, E. J, Gregory, K. D., Garden, R. A., OConnor, K. M., Chrostowski, S. J., & Smith, T. A (2000). *TIMSS 1999 international mathematics report*, https://timssandpirls.bc.edu/timss1999i/math_achievement_report.html adresinden 12 Nisan 2017 tarihinde alınmıştır.

Mullis, I. V. S., Martin, M.O., & Foy, P. (with Olson, J.F., Preuschoff, C., Erberber, E., Arora, A., & Galia, J.). (2008). *TIMSS 2007 international results in mathematics* https://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/mathreport.html adresinden 10 Nisan 2017 alınmıştır.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-resultsmathematics.html adresinden 10 Nisan 2017 tarihinde alınmıştır.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 international results in mathematics*. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/internationalresults/ adresinden 12 Aralık 2016 tarihinde alınmıştır.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The principles and standards for school mathematics*. Reston (VA): NCTM.

Özer, E., & Sezer, R. (2014). A Comparative analysis of questions in American, Singaporean, and Turkish Mathematics textbooks based on the topics covered in 8th grade in Turkey. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14(1), 411-421.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School*, *8*(3), 2-5.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Hope, J. A. (1993). Mental computation: A snapshot of second, fifth and seventh grade student performance. *School Science and Mathematics*, *93*(6), 306-315.

Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. *Teach Math Middle School*, *1*(2):114–120.

Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 225–237.

SCAA (1997). *The Teaching and assessment of number at key stage 1–3: Discussion Paper no. 10*, SCAA, London.

Steinberg, R. M. (1985). Instruction on derived fact strategies in addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(5), 337-355.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 1. *Mathematics in School* *28*(5), 2–4.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in School*, 24–26.

Thompson, I. (2010). *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*, In I. Thompson (Ed.), Getting your head around mental calculation (pp. 161-174), USA: Open University Press.

Torbey J., & Verschaffel, L. (2016). Mental computation or standard algorithm? Children's strategy choices on multi-digit subtractions. *Eur J Psychol Educ*, *31*, 99–116.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer.

Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal*, 35 (1): 89-94.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 557–628). New York: Macmillan.

Wijaya, A., M. van den Heuvel-Panhuizen., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-Learn ContextBased Tasks Provided by Mathematics Textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 41–65.

Yang D. C., Hsu C. J., & Huang M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 407–430.

Yang, D. C., Reys, R. E., & Wu, L. L. (2010). Comparing how fractions were developed in textbooks used by the 5th- and 6th-graders in Singapore, Taiwan, and the U.S.A. *School Science and Mathematics*, *110*(3), 118–127.

Yang, D. C. (2018). Study of fractions in elementary mathematics textbooks from Finland and Taiwan. *Educational Studies*, *44*(2), 190-211.

Yang, D.C., & Huang, K. L. (2013). An Intervention study on mental computation for second graders in Taiwan, *The Journal of Educational Research*, *107*(1), 3-15.