

Interpreting High School Students' Studies in Dynamic Geometry Environments in the Context of Geometric Working Spaces

Tuğba Tat^a and Aslıhan Batur Öztürk^b

^aTrabzon University, Fatih Education Faculty, Trabzon, Türkiye (ORCID: 0000-0001-9791-8229)

^bTrabzon University, Fatih Education Faculty, Trabzon, Türkiye (ORCID: 0000-0002-4461-0615)

Article History: Received: 10 January 2025; Accepted: 22 April 2025; Published online: 30 April 2025

Abstract: This study aimed to interpret the answers of 11th grade students to geometric questions presented in a learning environment enriched with dynamic geometry software, according to the theoretical framework of Geometric Working Spaces by Kuzinak et al. (2016). During the research process, the action research method served as the basis. In this direction, eight tasks designed by two researchers were first applied to the students by the teacher-researcher. The data related to the implementation process were reflected in the form of field notes and students' studies in the tasks. After the implementation, clinical interviews were conducted by asking three different geometry questions to six students in a learning environment with dynamic geometry software. At the end of the study, it was found that the students' geometric studies were generally concentrated in the Sem-Ins and Sem-Dis planes. This was interpreted as students working in Geometry I and Geometry II paradigms. In addition, as a result of the teacher-researcher's observations throughout the study, it was revealed that while some students' geometric studies initially reflected the Geometry I paradigm, they developed answers for more than one plane in subsequent tasks. This shows that students' geometric understanding can improve as they work on tasks in dynamic geometry environments.

Keywords: Geometric paradigms, Geometric working spaces, Dynamic geometry software, Action research

Öz: Bu araştırmada, 11. sınıf öğrencilerinin dinamik geometri yazılımı ile zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamında sunulan geometrik sorulara ilişkin cevaplarının Kuzinak vd'in (2016) Geometrik Çalışma Uzayları kuramsal çerçevesine göre yorumlanması amaçlanmıştır. Araştırmanın yürütülmesi sürecinde, eylem araştırması yöntemi temel alınmıştır. Bu doğrultuda, iki araştırmacı tarafından tasarlanan sekiz etkinlik öncelikle araştırmacı öğretmen tarafından öğrencilere uygulanmıştır. Uygulama sürecine ilişkin veriler alan notları ve etkinliklerdeki öğrenci çalışmaları şeklinde yansıtılmıştır. Uygulamadan sonra, dinamik geometri yazılımının yer aldığı öğrenme ortamında 6 öğrenciye üç farklı geometri sorusu yöneltilerek klinik mülakatlar yürütülmüştür. Araştırmanın sonunda, öğrencilerin geometrik çalışmalarının genel olarak Gös-Arç ve Gös-Syl düzlemlerinde yoğunlaştığı tespit edilmiştir. Bu durum, öğrencilerin Geometri I ve Geometri II paradigmlarında çalıştıkları şeklinde yorumlanmıştır. Ek olarak, araştırmacı öğretmenin araştırma boyunca yaptığı gözlemler sonucunda, bazı öğrencilerin geometrik çalışmalarının başlangıçta Geometri I paradigmasını yansıtırken ilerleyen etkinliklerde birden fazla düzleme yönelik cevaplar geliştirdikleri ortaya çıkmıştır. Bu durum, öğrencilerin dinamik geometri ortamlarında yer alan etkinlikler üzerinde çalışırken geometrik anlama düzeylerinin gelişebildiğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Geometrik paradigmlar, Geometrik çalışma uzayları, Dinamik geometri yazılımı, Eylem araştırması

[Türkçe sürüm için tıklayınız](#)

1. Introduction

Geometric concepts are not limited to school years; instead, they continuously appear in our daily lives, often without our conscious awareness. Even before formal education begins, children gain a wide range of informal geometric knowledge through play. From an early age, they are exposed to various geometric shapes and start to notice differences in form and size (van Hiele, 1999). When they start school, younger students learn to recognize relationships between concrete objects and describe their spatial positions relative to each other. In higher grades, students are expected to develop more advanced skills, such as identifying and relating properties of geometric figures, classifying shapes, constructing loci, and proving geometric propositions. Essentially, people rely on geometric skills throughout their lives. Due to the significant role geometry plays in everyday life, researchers and educators must understand, interpret, and accurately analyze this field.

As computer technology continues to advance, the quality and quantity of educational software are increasing. Dynamic geometry software is one such example, enabling students to construct geometric figures and explore the properties and relationships of geometric shapes and structures. Students can examine a given geometric object from various perspectives in two or three dimensions. The most well-known and widely used dynamic geometry tools are GeoGebra, Cabri, and Geometer's Sketchpad. In recent years, integrating such software into classroom instruction has significantly increased students' interest in geometry. The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) emphasizes in its principles and standards for School Mathematics that dynamic geometry environments play an essential role in developing students' geometric

Corresponding Author: Tuğba Tat



email: tugba_tat21@trabzon.edu.tr

Citation Information: Tat, T. & Batur Öztürk, A. (2025). Interpreting high school students' studies in dynamic geometry environments in the context of geometric working spaces. *Turkish Journal of Mathematics Education*, 6(1), 20-69.

understanding. Similar emphasis is also reflected in the latest mathematics curriculum. The high school curriculum states that students should be able to interpret geometric constructions prepared by the teacher using such software interactively (MoNE, 2024).

These new tools have revolutionized the way students learn geometry by changing how geometric constructions and verifications are performed. By adding a new dimension to visualization and experimentation, they have greatly influenced the cognitive aspect of students' studies (Kuzniak, 2014). Houdement and Kuzniak (1999) summarize this transformation into two main categories: the first, called “elementary school geometry” is characterized by young learners mainly relying on spatial knowledge and skills, while the second, “authentic geometry” is based on proof and includes applications of advanced mathematical fields such as vector spaces and linear algebra. To understand this distinction in geometry education, Houdement and Kuzniak introduced the idea of “geometric paradigms.” Building on this, Kuzniak later proposed a model based on geometric paradigms that describes how geometry is practiced in learning environments (Kuzniak, 2006). Known as the Geometric Working Spaces (GWS) model, this framework aims to examine how students and teachers interact with geometric concepts, identifying the different cognitive and epistemological levels involved in learning and using geometric knowledge (Kuzniak, 2014; Kuzniak & Richard, 2014). The model features three main working spaces. In the natural working space, students generally operate at the first and second levels of van Hiele's (1999) thinking hierarchy. They describe shapes and their properties based on personal experience and visual appearance. For example, they see triangles as having sharp corners and squares as having four equal sides. In the axiomatic working space, students work at the third and fourth van Hiele levels, engaging in reasoning and proofs based on axiomatic systems. For instance, they might deduce that the base angles of an isosceles triangle are equal using Thales's congruence theorems. Unlike these, the instrumental working space involves using tools within geometric thinking. Here, students combine intuitive and axiomatic methods with instruments such as dynamic geometry software (e.g., GeoGebra) or traditional tools like compasses and straight edges. This allows them to make discoveries through visual experience and formal reasoning.

This study emerged from a high school teacher's desire to develop appropriate instructional strategies by conducting a more in-depth analysis of the working space in which their students operate, using the model proposed by Kuzniak et al. (2016).

1.1. Theoretical Framework

This section will first discuss the geometric paradigms, different geometries, and GWS in Kuzniak et al.'s (2016) model.

1.1.1. Geometric Paradigms and Three Elementary Geometries

Geometric paradigms are emphasized to understand how individuals solve problems in geometry (Houdement & Kuzniak, 1999, 2003). People need a shared set of beliefs, techniques, or practices to develop solutions and communicate them to others. This need is directly related to the paradigm they adopt (Kuhn, 1966). When people share the same paradigm, they can communicate more easily and effectively. Conversely, different paradigms can lead to misconceptions and sometimes even complete misunderstandings (Kuzniak, 2014; Kuzniak & Rauscher, 2011). For instance, the paradigm used in interpreting figures in geometry guides how figures are understood. Sometimes, a geometric figure can be perceived based on its properties without measuring data. Different paradigms have been accepted in geometry teaching to reveal and categorize these diverse, sometimes conflicting, perspectives (Kuzniak & Nechache, 2021). Three geometric paradigms are identified for examining school-level geometry: Natural geometry (Geometry I), which involves a real and perceptible space. In this geometry, proofs often rely on drawing tools or techniques such as folding and cutting (Kuzniak, 2014). Therefore, mechanical and experimental proofs become significant. It aligns with the idea that geometry provides tools for solving everyday life problems (Kuzniak, 2018). Natural axiomatic geometry (Geometry II) is based on Euclidean geometry and involves a space that approximates reality but does not fully integrate with it. Proofs in this geometry must be developed within an axiomatic system to be valid. Although the definitions of geometric objects, like figures, focus on certain properties of real, tangible objects, these objects are considered idealized entities within an axiomatic structure in Euclidean geometry; thus, they are accepted by definition (Kuzniak, 2014). Formal axiomatic geometry (Geometry III), which is not typically part of school mathematics but may be encountered by those with advanced mathematical training, involves purely theoretical objects. The axiomatic system is disconnected from real space but holds a central role. This paradigm, which led to non-Euclidean geometries, addresses more logical issues (Kuzniak & Rauscher, 2011). These paradigms are not addressed in a developmental sequence; no hierarchy exists among them. Each paradigm has its distinct domain, and the method individuals use to solve problems depends on the problem's purpose and the paradigm they adopt (Kuzniak, 2018).

1.1.2. Geometric Working Spaces

The model of GWS was developed based on the distinction between three different paradigms (Artigue, 2016). While attempting to solve geometric problems, students frequently shift between different paradigms. For example, they may use figures and tools in various ways, such as sources of information or for proving certain properties (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015). The GWS model was established to systematically describe these modes of work, observed during school-level geometry instruction and guided by different paradigms (Kuzniak, 2006). GWS can be considered an abstract environment that reflects the interaction between an individual and a geometric problem. This environment helps to characterize the type of work a student engages in while solving a problem. Moreover, the structure of GWS varies depending on the educational system (intended or reference GWS), school conditions (implemented or suitable GWS), and practitioners (students' and teachers' personal GWS).

To define the characteristics of a student's geometric work, both the epistemological and cognitive dimensions of problem solving are taken into account. These dimensions are organized within the GWS model as two interconnected planes: the epistemological plane, which is directly related to the mathematical content of the studied field (here, geometry), and the cognitive plane, which concerns the thinking processes of individuals solving geometric problems (Figure 1a). When addressing and explaining geometric work from an epistemological perspective, three interactive components constructed entirely based on geometric criteria become essential: *Representamen*, *artifacts*, and *referential*. Through these components, the teaching and learning process is structured by the nature of geometry. *Representamen* involves a set of concrete and real representations. *Artifacts* include instruments or software used to produce constructions. *Referential* refers to the meanings attributed to definitions, properties, relationships, and propositions formulated through the use of drawing tools (Kuzniak & Nechache, 2021). Furthermore, to understand how individuals utilize their knowledge when confronted with geometric problems, the cognitive plane of the GWS model is emphasized. This plane is closely related to the epistemological plane and can be considered a mental reflection of it in the mind of the individual. In order to describe the cognitive processes involved in geometric problem solving, Duval's (2005) framework is adopted in this plane. Accordingly, the components of visualisation, construction, and proof, adapted from Duval (2005), are regarded as its fundamental elements. *Visualisation* pertains to the analysis and interpretation of symbols. *Construction* refers to the process of building, which depends on the tools and techniques used. Finally, *proving* is a process involving validation and is grounded in theoretical reference. To achieve coherent and complete geometric work, the integration of the epistemological and cognitive planes is necessary. According to Kuzniak et al. (2016), this integration is made possible through three fundamental genesis, as schematized in Figure 1a. The GWS model is thus characterized as a production process (involving specific reasoning patterns, decision-making, etc.) in conjunction with *semiotic*, *instrumental*, and *discursive genesis* (Kuzniak & Nechache, 2021). *Semiotic genesis* enables the interaction between concrete objects and geometric entities (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015). Duval (2005) refers to two types of processes related to this formation: the first is associated with the perceptual recognition of figures, while the second involves a more abstract interpretation of symbols about the concept of figure as a symbolic object. *Instrumental genesis* represents a transformation in which the drawing tool is utilized during the construction process. This transformation is described in two directions: an upward movement, where one transitions from the drawing tool to the construction of a geometric locus; and a downward movement, where one shifts from the geometric locus to the selection and proper use of a tool for geometric construction (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015). In the *discursive genesis* associated with proof, the properties used in mathematical reasoning are given meaning. This genesis involves a two-way validation process: a deductive approach supported by properties constructed within the meaning of the object, and conversely, the identification of properties and theorems that can be integrated into the meaning framework of the object (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015).

The functionality of the GWS model should not be understood as a simple aggregation of individual components located on the epistemological and cognitive planes, but rather as connections activated through two or three genesis. Different genesis do not operate independently; instead, they must interact with one another to give meaning to geometric work. Kuzniak and Richard (2014) highlight three vertical planes, each defined by the presence of two genesis that constitute either the epistemological or the cognitive plane (Figure 1b): *Semiotic and Instrumental genesis [Sem-Ins]* (which involves the representation of a geometrical idea through symbols and its construction using concrete tools (such as drawing instruments or software), *Semiotic and Discursive genesis [Sem-Dis]* (which entails the construction of a geometrical idea using both visual and verbal means), *Instrumental and Discursive genesis [Inst-Dis]* (which refers to the joint construction of a geometrical idea using both instrumental and discursive methods).

In the [Sem-Ins] plane, two fundamental modes of work can be observed. The first focuses on the construction of geometric figures that satisfy certain conditions, while the second is directed toward the interpretation of data provided by the tools and drawing instruments (artifacts) used in the process.

In the [Sem-Dis] plane, the nature of the approach depends on the priority given to either the semiotic or the discursive component. If the emphasis is on the semiotic dimension, visual transformations structure the identification of figures and shape perceptual reasoning. In contrast, if the focus lies on property-based hypothetical deductions and the process of deductive proof, figures and visualization play a more intuitive role.

In the [Ins-Dis] plane, the critical question is whether the proof is based on experimental evidence or purely deductive reasoning. If conclusions are drawn from data provided by tools, the proof is considered experimental. Alternatively, if the proof relies on a theoretical reference, the tools are used to illustrate or construct geometric configurations.

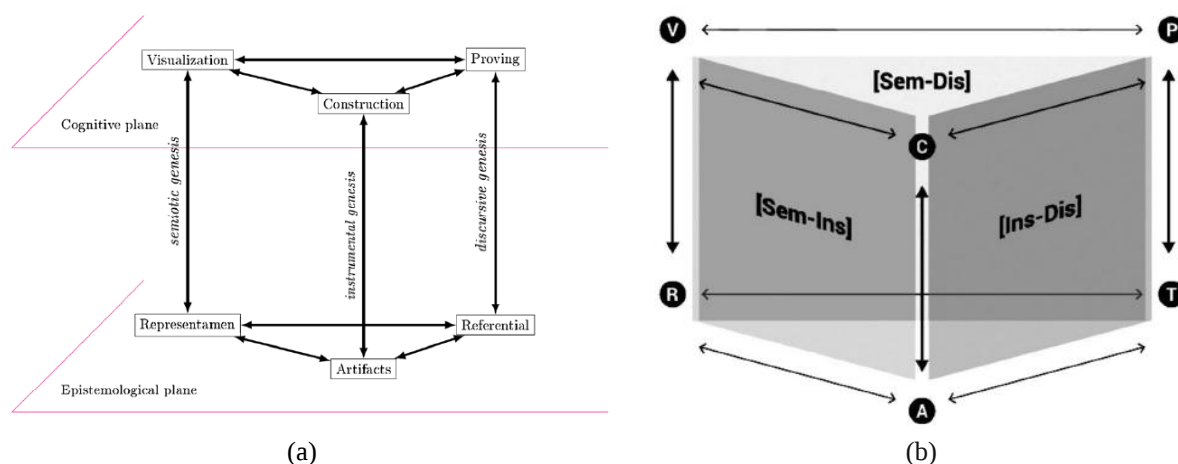


Figure 1. (a) The model of GWS; (b) Vertical Planes (Kuzniak et al., 2016, pp. 725-727)

1.2. Rationale and Significance of Research

Throughout my long-standing career in teaching, I can say that geometry has been one of the subjects that students struggle with the most in mathematics classes. Students particularly face difficulties in investigating the properties of geometric figures and structures through the use of theorems, establishing relationships between these structures, and analyzing them within different spaces. These challenges consistently emerge each year among the students I encounter. Accordingly, certain difficulties also arise in the way geometry classes are conducted. Some of these include students' inability to mentally visualize how geometric shapes and spatial relationships function concretely, their prejudices against geometry, and a lack of motivation. Over time, I have attempted to develop various alternatives to overcome these difficulties. Among these, technology, which has become an integral part of all aspects of our lives, stands out as a primary tool.

Students transitioning from middle school to high school are expected to move from natural geometry, where knowledge is constructed through intuition, perception, and empirical validation, to natural axiomatic geometry, which requires the use of properties of ideal objects in reasoning processes (Çalışkan-Dedeoğlu, 2016). Relevant studies have demonstrated the contribution of dynamic geometry software to processes involving visualisation and construction (Sem-Ins plane) within the GWS model (Coutat & Richard, 2011). By entering the field of geometry education, dynamic geometry software has transformed geometry from a static, paper-and-pencil process into a dynamic, screen-based experience, enabling students to focus more effectively on abstract structures and thus facilitating the transition to axiomatic geometry (Güven & Karataş, 2003). Through this approach, students are able to engage comfortably in exploratory environments, gaining opportunities to discover, hypothesize, test, formulate, and explain. From this perspective, it becomes evident that the quality of students' work improves as they integrate previously acquired knowledge with the hands-on experiences offered by new technologies, following their mathematical understanding and cognitive capacities. As a practicing teacher, I have had the opportunity to closely observe the geometrical work carried out by students. Additionally, I have employed various instructional techniques within the classroom to help shape and develop students' work. I evaluated these practices through observation in an attempt to better understand the nature of the work conducted by students. As a teacher, I decided to employ action research in my study, as it allowed me to examine the process of problem-solving in depth within the classroom setting.

The GWS model is a relatively new theory. This theory must be reviewed, expanded, and refined through practical applications. In the international literature, studies focusing on GWS are limited and have been primarily conducted by Kuzniak and his collaborators (Kuzniak, 2006, 2014, 2018; Kuzniak & Rauscher, 2011; Kuzniak & Richard, 2014; Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016; Kuzniak & Nechache, 2021). In Turkey, however, research in this field remains scarce (İmamoğlu et al., 2023). In this context, it is believed that the present action research study will contribute to filling this gap. Through action research, I observed students' geometrical work

as a result of the instructional techniques I implemented in my classroom. Over the years, using various strategies in teaching geometry topics, I attempted to explore how students carried out their geometrical work. In the early years, I monitored students' progress in geometry through the tasks I designed. In these tasks, students primarily relied on the given information and attempted to construct basic-level proofs. I observed that such practices did not lead to significant cognitive development in students' geometrical work. This action research aims to investigate how integrating technology into mathematics classes, specifically through tasks designed with dynamic geometry software, influences students' geometrical work. It is believed that the findings of this study will offer valuable insights for teachers in identifying effective strategies when planning their students' geometrical learning processes, as well as for curriculum developers and researchers seeking to design new learning environments.

1.3. Purpose of the Research

The primary aim of this study is to conduct an in-depth analysis of students' geometric work within learning environments supported by dynamic geometry software, based on the model proposed by Kuzniak et al. (2016). In line with this objective, the research problem addressed in the study is expressed as follows:

How do mathematics classes based on dynamic geometry software influence high school students' geometric work?

2. Method

This section includes the research design, the participants, the tasks implemented during the process, the data collection tools, and the data analysis.

2.1. Action Research Process

This research aims to understand how teaching the subject of circle in an environment equipped with dynamic geometry software affects students' geometric work, using an action research approach. Action research is a qualitative research method that involves the systematic collection and analysis of data, the identification of problems encountered during the teaching-learning process, or the resolution of existing problems, and accepts the researcher's perceptions and interpretations as part of the data (Çepni, 2014). A fundamental assumption of action research is that teachers are best positioned to understand their practices and are capable of implementing the most effective measures to improve the educational environment. This perspective highlights that action research serves as a crucial tool in bridging the gap between theory and practice by bringing them closer together (Johnson, 2002).

Action research is not a simple problem-solving process. It is a systematic procedure that involves gathering information about the problem, proposing and implementing original ideas to address the problem, and critically reflecting on these implementations. Tomal (2003) compares the action research process to a physician treating a patient. The doctor first identifies the problem based on the patient's complaints, conducts a series of medical diagnostic tests (data collection), discusses the results with the patient (analysis and feedback), decides on and applies a treatment plan (planning and action), and then evaluates the patient's condition. Similar stages were followed in this study. As a researcher, through years of observation, I noticed that many of my students struggled significantly with learning geometry, lacked motivation for the class, and were unable to provide sufficient answers to questions. This issue emerged as a serious problem negatively affecting students' geometric thinking processes and their work. To overcome this problem, I decided to integrate dynamic geometry software into my geometry classes and analyze students' cognitive experiences in these new learning environments regarding geometry learning. For this purpose, I collaborated with another researcher in designing the tasks, implementing them, and analyzing the data. Particularly, tasks related to the teaching of circle, a subject included in the curriculum and one with which students commonly experience learning difficulties, were designed. Before the implementation, the van Hiele Test was administered to gain a general understanding of students' levels of geometric thinking (Baki, 2020).

Field notes and observations were utilized to more clearly reveal the impact of tasks supported by dynamic geometry software. This enabled more detailed evaluations of any issues or difficulties encountered during the implementation of the tasks.

2.2. Participants

The sample of this study comprises six eleventh-grade female students enrolled in a public high school in Turkey. These students demonstrated moderate achievement in the nationwide centralized examination and are currently taking science-oriented courses. In this study, codes such as S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6 were used instead of the participants' real names.

2.3. Role of the Researcher

This study was carried out by two researchers. In the initial phase, they collaboratively designed tasks centered on dynamic geometry software. During the second phase, which involved implementing these tasks, the first author served as the teacher-researcher and led the classes. This dual role allowed the researcher-teacher to closely observe the students' geometric work. Field notes related to the learning process were recorded by the researcher-teacher. After the implementation, the two researchers jointly selected three geometry questions to ask the students. Then, clinical interviews were conducted with six students in an environment equipped with dynamic geometry software. The second researcher recorded these interviews on video, and both researchers analyzed the recordings together using the model proposed by Kuzniak et al. (2016).

2.4. Research Design

A problem experienced in the classroom formed the starting point of this action research. During the doctoral studies, the researcher-teacher conducted investigations on how and for what purposes the dynamic geometry software GeoGebra could be used in the teaching environment. In preparing the tasks, first, I examined the general objectives of the high school mathematics curriculum and the topics taught in 11th grade. Secondly, I selected topics most suitable for using GeoGebra software. Finally, I simultaneously reviewed the general objectives of the curriculum, the subjects, and the learning outcomes in the textbook, and decided that the circle was the most appropriate. In this context, I designed eight tasks (URL-1, 2022) by adapting content from the Ministry of National Education (MoNE) resource books and open-access materials, and sought expert opinions. The tasks are provided in Appendix 1. All tasks enable students to perform applications on GeoGebra and help them learn the subject of circle through exploration. During the tasks related to the circle subject, I took screenshots of the students' work on the screen. Table 1 presents information about the names of the tasks used in the implementation, the subject they belong to, and the duration of each task.

Table 1. Tasks Implemented During the Process

Task Name-No	Task Focus	Duration (class hours)
Spider Web- Task 1	Central Angle and Inscribed Angle	40 min (1 class hour)
Wheel- Task 2	Tangent, Chord, Diameter, Arc, and Secant in the Circle	40 min (1 class hour)
Drain Pipes- Task 3	Tangent-Chord Angle	40 min (1 class hour)
Embroidery Hoop- Task 4	Interior Angle and Exterior Angle in the Circle	40 min (1 class hour)
Wastewater Treatment Project- Task 5	Properties of a Chord in the Circle	40 min (1 class hour)
Ammo Delivery Routes- Task 6	Positions of a Line to a Circle	40 min (1 class hour)
Ship Routes- Task 7	Tangent and Tangent Segment	40 min (1 class hour)
Bracelet Cans- Task 8	Tangential Quadrilateral	40 min (1 class hour)



Figure 2. Snapshots from the Implementation of Tasks in the Classroom

The intervention lasted for 8 class hours and was completed over a total period of 3 weeks. Throughout this process, I continuously maintained field notes based on observations of the students. In action research, the teacher conducts participant observations; in this study, I naturally observed students' reactions to the tasks and recorded significant occurrences. Additionally, I kept daily field notes before and after classes to reflect on my observations and thoughts regarding the students. An example excerpt illustrating this is provided below.

(Ammo Delivery Routes- Task 6)

This was one of the tasks that students struggled with the most. At first, they couldn't understand the purpose of the lines included in this task. It was also the longest task in terms of duration compared to the others. This was the first task where they experienced the algebra window. As students wrote the equations from the task into the algebra window, they gradually started to interpret the shapes that appeared. Some students substituted point A (+1, -7) into the equations and stated that it satisfied all the lines; therefore, they responded that the ammunition would be placed at all three points. One student mentioned that the distance between two points could be measured with a ruler. Later, I asked the student whether they remembered the formulas related to analytic geometry. After this question, the student realized their mistake. Some students wrote "x" and "y" in uppercase letters in the algebra window and created sliders instead of lines. Afterwards, through trial and error, they managed to draw the lines by writing the letters in lowercase.

As in the example given above, I tried to evaluate my students' reactions during the implementation through my field notes. I made observations about which GeoGebra tools they used. I conducted clinical interviews with the students to identify their progress in geometric work.

2.5. Data Collection Tool

In the study, clinical interview questions were developed to clearly and explicitly reveal the students' geometric work. In this context, based on a review of relevant literature, the curriculum, textbooks, and expert opinions, three questions were posed to the students. These questions are as follows:

- Find the center of a circle.
- Draw a tangent to a circle from a point outside the circle.
- Divide a circle into two equal parts.

Each student was interviewed for approximately 15-20 minutes. With the students' permission, these interviews were video recorded. During the interviews, students' responses to the questions were obtained, and discussions were held about the reasons behind their answers.

2.6. Data Analysis

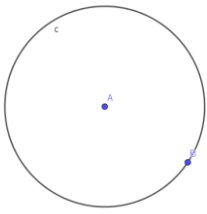
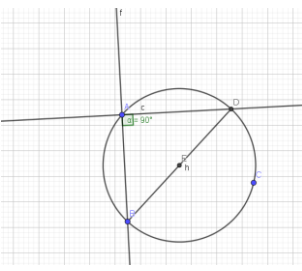
The students' geometric works in the study were qualitatively analyzed based on geometric paradigms and the GWS model. Table 2 illustrates how the responses of two students to the question, "Find the center of a circle," were analyzed.

When examining Table 2, the students' responses to the interview questions were interpreted in terms of the related paradigm, the components reflected within the GWS framework, the genesis actively utilized, and the corresponding planes. All students' answers were analyzed using this approach. Additionally, the results were summarized in a general tally table. Thus, by evaluating students' responses to each question, their geometric work was characterized.

2.7. Research Ethics

This research was conducted under ethical guidelines and was approved by the Trabzon University Social and Human Sciences Scientific Research and Publication Ethics Committee (approval number: E-81614018-050.04-2500003318). Before the study, the high school students participating in the research were given sufficient information about the study, assuring them that their responses would be used solely for scientific purposes and that their personal information would not be shared with any third parties or institutions. After obtaining the students' consent, the implementation phase began.

Table 2. Example Analysis of a Student's Response

Student's GeoGebra Drawing (if any)	Interview Excerpt	Comment / Interpretation
	S: This question seemed a bit easy. R: Why? S: The center of a circle... When we draw a circle, it's already drawn with a center. R: So you mean the center is found directly. S: Yes. R: Do you think there is another way? Or how would you do this on paper and pencil? S: I would draw a circle on paper. Then I would cut out the shape from the paper and fold it in half. Then I would fold it from the other side again. That way, I would find the center	Paradigm: Geometry I (Natural Geometry) Drawing a circle on paper (Representamen) Genesis: Semiotic Cutting and folding the paper (Artifacts) Genesis: Instrumental Plane: Sem-Ins (Semiotic-Instrumental)
	S: First, I would create a circle passing through three points. R: Why did you start with this kind of drawing? S: Because I think I need a line segment to find the center. So, I can use points A and B. (...connects the points with a line segment). I'm actually thinking of this: when an inscribed angle is 90 degrees, the arc it intercepts is a diameter. So, I can find the center by starting from the diameter. R: How? S: When I create a perpendicular at points A and B, the angle here will be 90 degrees. (...intersects the points, saying "let's intersect the points"). (...then measures the angle). The angle $\angle BAD$ came out to be exactly 90 degrees. Now, the segment seen by this 90-degree angle will give us the diameter. (...connects points B and D). We've created our diameter. Because the segment seen by a 90-degree angle is equal to the diameter. If it weren't 90 degrees, BD would be a chord.	Paradigm: Geometry II (Natural Axiomatic Geometry) Drawing a circle passing through three points (Visualization) Genesis: Semiotic Ensuring the angle between lines A and B on the circle is 90 degrees (The inscribed angle subtended by a diameter is 90° theorem) (Referential) Genesis: Discursive Plane: Sem-Dis (Semiotic-Discursive)

3. Findings

The findings obtained from the research have been examined under two main headings: implementation process and post-implementation phase. In the first section, the implementation process, the tasks conducted within the learning environment supported by dynamic geometry software are summarized. In the second section, the post-implementation phase, students' responses to the clinical interview questions presented at the end of the implementation process are provided.

3.1. Implementation Process

The instructional sequence on the subject of the circle began with a class focusing on the concepts of central and inscribed angles. In this class, students engaged with the *Spider Web* task (see Appendix 1), which I had previously designed. This task, conducted over 1 class hour (40 minutes), required students to trace the paths followed by spiders on a circle constructed in GeoGebra and to determine whether the intersecting paths represented central or inscribed angles. The students worked on the task using GeoGebra. Figure 3 provides excerpts from the students' digital constructions.

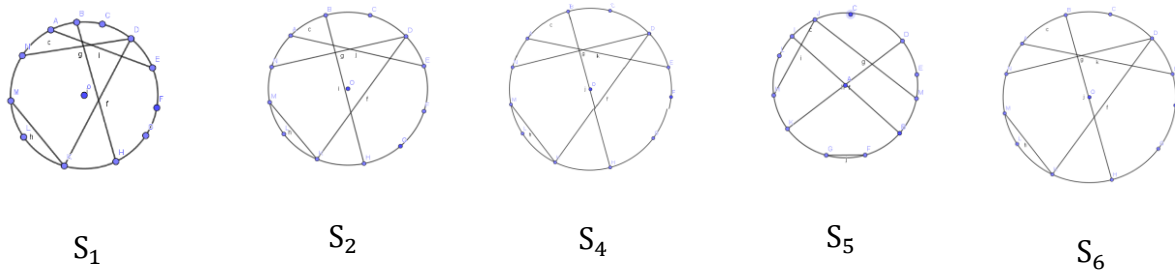


Figure 3. Students' drawings for the "Spider Web" task

Overall, students successfully constructed the given circle and represented the spider's path by connecting points on the circle with chords. However, some students encountered difficulties completing their diagrams due to inconsistencies in labeling the points. While identifying central and inscribed angles, students recognized that their work was focused within the interior of the circle. My observation note during the class is as follows:

"Except for student S_3 , a total of five students participated in the task. This was the students' first experience with a GeoGebra-based task. All participating students were able to construct the required figure in GeoGebra, including the circle and relevant points. The researcher asked the students how they would construct central and inscribed angles. The students responded that they would use chords for this purpose. They had understood that both central and inscribed angles are located within the interior of the circle. Some students mentioned that they were confused because the points in the task differed from the ones they had constructed themselves."

After solidifying their understanding of central and inscribed angles, students proceeded to the *Wheel* task (see Appendix 1), which centered on key circle concepts such as tangent, chord, diameter, arc, and secant. Conducted over a single class hour, the task required students to construct the given wheel using GeoGebra and answer a series of related questions. These questions were designed to highlight various geometric relationships among points on the circle, prompting students to interpret and explain these relationships using appropriate geometric terminology. To support their reasoning, students created corresponding constructions in GeoGebra. Figure 4 presents excerpts from their digital drawings.

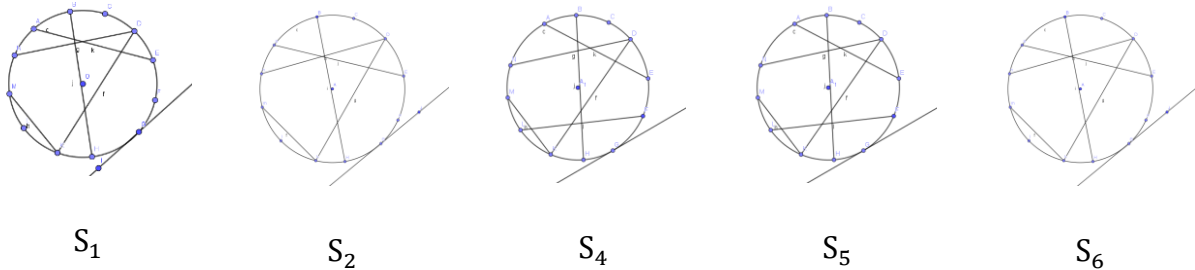


Figure 4. Students' drawings for the "Wheel" task

Through this task, students began to develop greater confidence in using GeoGebra. Indeed, they were able to create the circle with ease and label the points according to the instructions provided in the task. Overall, they explained their drawings effectively using the concepts of tangent, chord, diameter, and arc. However, as illustrated in Figure 4, it is evident that some students encountered difficulties with the concept of a secant. Specifically, instead of representing a secant as a line, they attempted to depict it using a line segment (i.e., a chord). As a result, some students were unable to correctly distinguish which element represented the secant. My observation note during the class is as follows:

"Except for student S_3 , a total of five students participated in the task. Compared to the previous task, students appeared to be more accustomed to using GeoGebra in this task. They were able to label the points correctly while making their constructions. Students attempted to identify and mark the concepts of tangent, chord, arc, diameter, and secant by the task requirements. Three students were unable to correctly identify the secant in the corresponding table, while the remaining two students completed all items in the table accurately. It appeared that some students experienced cognitive confusion, specifically regarding the concept of the 'secant'."

After supporting students in discovering and learning the fundamental concepts related to circles, I shifted the instructional focus to a key concept that builds upon these foundations: the tangent-chord angle. To facilitate students' understanding of this concept, they engaged with the *Drain Pipes* task (see Appendix 1). Conducted over one class hour (40 minutes), this task required students to design drainage pipes within a structure consisting of two perpendicular paths, such that the angles formed represented tangent-chord angles. In addition, the task aimed to help students establish a relationship between the measure of a tangent-chord angle and the arc it intercepts. Students constructed the given structure using GeoGebra. Figure 5 presents excerpts from their digital drawings.

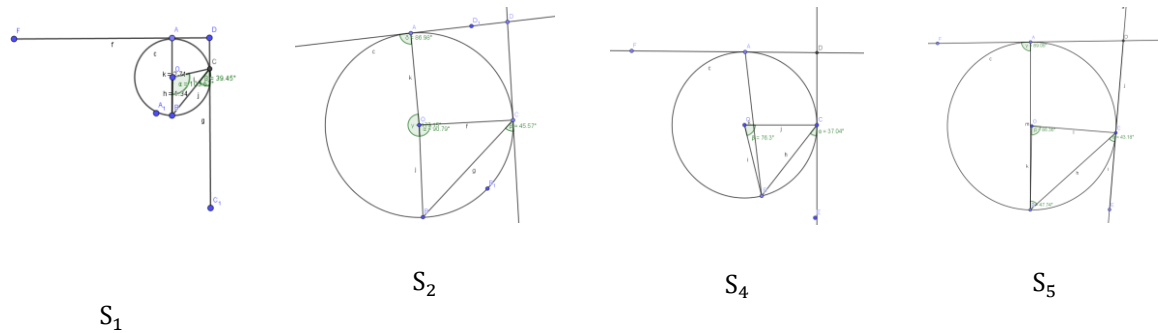


Figure 5. Students' drawings for the "Drain Pipes" task

Students were able to accurately conceptualize the tangent-chord angles they constructed, as well as the relationships between these angles and the measures of the arcs they subtended relative to central angles. My observation note during the class is as follows:

"Excluding students S_3 and S_6 , a total of four students participated in this task. During the task, students reported that by measuring angles, they were better able to understand that the measure of a tangent-chord angle is equal to half the measure of the arc it intercepts. Additionally, they explored the property that the longest chord passing through the center is the diameter by manipulating the position of a chord about the center of the circle, making observations about changes in chord length accordingly."

To support students in learning the concepts of interior and exterior angles in a circle, I engaged them in the *Embroidery Hoop* task (see Appendix 1). Within a single class hour, students were asked to construct the given hoop model using GeoGebra and to identify the interior and exterior angles formed at the intersections of threads stretched across the hoop. Figure 6 presents excerpts from students' GeoGebra constructions of the hoop model.

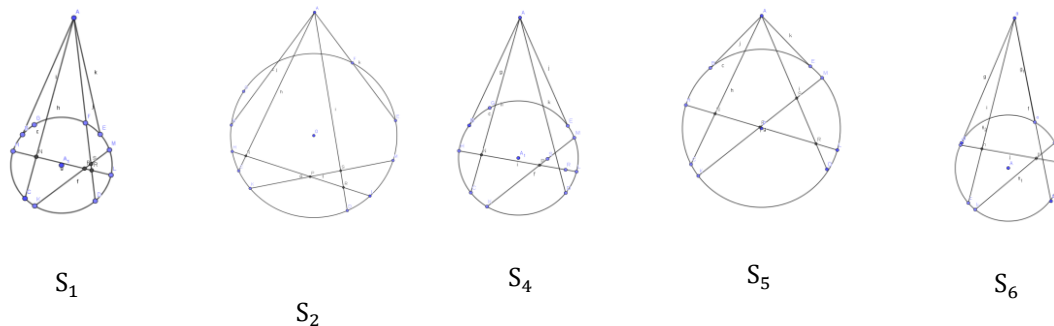


Figure 6. Students' drawings for the "Embroidery Hoop" task

Although students did not encounter difficulties in drawing the hoop model using GeoGebra during this task, it was observed that they experienced some challenges in identifying all of the interior and exterior angles on their constructions. My observation note during the class is as follows:

"Excluding student S_3 , a total of five students participated in the task. Compared to the previous two tasks, students were able to construct the figures in GeoGebra more quickly. Only one student was able to accurately and completely record all of the interior and exterior angles in the response section."

In another class, the focus shifted to exploring the properties of chords in a circle, such as the fact that the perpendicular bisector of a chord passes through the center of the circle, that a line connecting the midpoint of a chord to the center is perpendicular to the chord, and the relationship between chord length and its distance from the center. To this end, students worked for one class hour (40 minutes) on the *Wastewater Treatment Project* task (see Appendix 1). In this task, sewer pipes are installed between neighborhoods located at different points on a circular region. A central waste transport line is to be laid from the center of the circle to connect with these sewer pipes, and this line is required to be as short as possible. Students were first asked to draw the circular region and the sewer pipes between the neighborhoods using GeoGebra. Figure 7 presents excerpts from the students' digital drawings in GeoGebra.

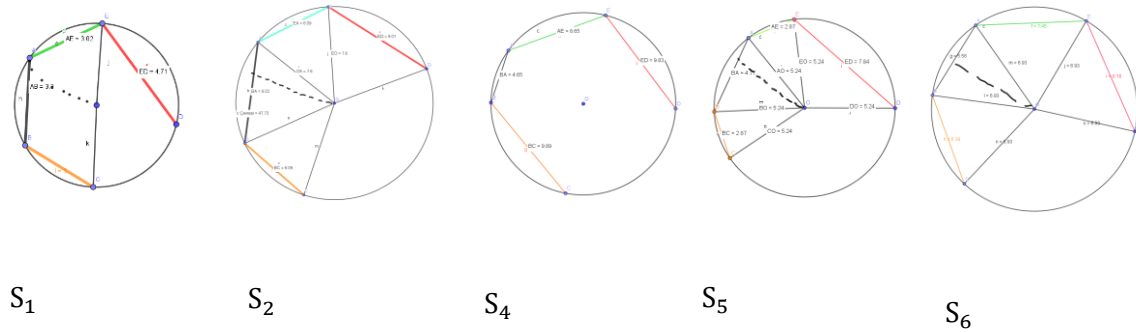


Figure 7. Students' drawings for the “Wastewater Treatment Project” task

In general, through this task, students discovered that the shortest wastewater transport line is the perpendicular drawn from the center of the circle to the sewer pipes (i.e., the chords), and that the length of this perpendicular varies depending on the length of the chords (for example, it is shorter for longer chords). In this way, they were able to determine which line between two neighborhoods would be shorter or longer. They successfully discovered the intended properties in the task. My observation note during the class is as follows:

“Five students participated in the task. Upon first reading the question, students appeared confused, primarily due to the varying lengths of the pipes (i.e., chords) depicted in the task. Four students correctly answered the initial question: “Identify which pipeline, drawn from the treatment facility to the sewer pipes, would be the most cost-effective (i.e., the shortest) among the connections between neighborhoods.” One student, however, stated that they assumed the cost would be proportional to the number of neighborhoods rather than the pipe length. Toward the end of the task, students were able to complete the constructions accurately and respond to the questions as intended. Through peer interaction, they discovered the color-changing feature in GeoGebra, which enabled them to complete their constructions using color.”

To explore the possible positional relationships between a circle and a line, students were engaged in the *Ammo Delivery Routes* task (see Appendix 1). In this task, a military helicopter located at a specific coordinate is required to deliver ammunition to various points in a circular region. For this purpose, three linear routes, each represented by a distinct linear equation, are proposed. During a single class period, students were asked to draw the circular region and the given lines using GeoGebra and to mathematically analyze the relationships between the circle and the lines. Figure 8 presents excerpts from the students' drawings in GeoGebra.

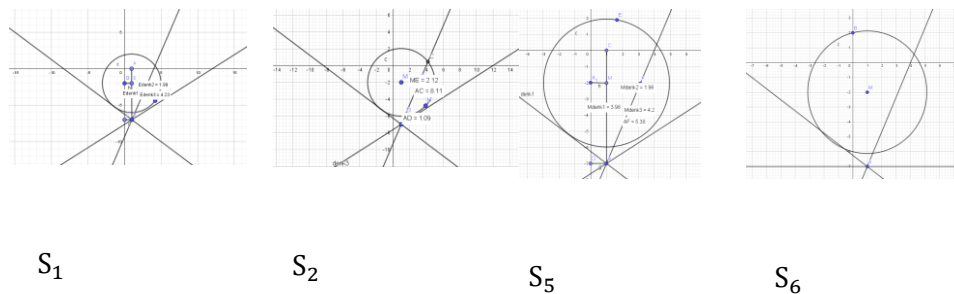


Figure 8. Students' drawings for the “Ammo Delivery Routes” task

This task was particularly valuable in encouraging students to make use of the algebra window in GeoGebra. Students encountered certain difficulties, especially in constructing lines and calculating distances between points. I observed a variety of reasoning approaches when students attempted to determine how many points a given line intersected the circle and to calculate the shortest distance from a line to the center of the circle. My observation note during the class is as follows:

“Four students participated in the task. This was one of the most challenging tasks for the students. Initially, they struggled to understand the purpose of the given lines within the context of the task. Compared to the other tasks, this one took the longest to complete. It was also the first time students had the opportunity to engage with the algebra window in GeoGebra. As they entered the equations provided in the task into the algebra window, they gradually began to interpret the resulting geometric representations. Some students substituted the point $A(+1, -7)$ into the equations and, upon observing that it satisfied all three equations, concluded that the ammunition would be delivered to all three locations. One student stated that they could measure the distance between two points using a ruler. I then asked whether they remembered any formulas related to analytic geometry, at which point the student recognized the error in their reasoning. Some students, when entering the equations, used capital letters for the variables “x” and “y,” which resulted in the creation of sliders instead of lines. Through trial and error, they eventually realized that using lowercase letters was necessary to properly construct the intended lines.”

To support students in drawing tangents from a point outside a circle and in discovering that the lengths of tangent segments drawn from an external point to a circle are equal, I engaged them in the *Ship Routes* task (see Appendix 1). Conducted over one class hour (40 minutes), this task presented a circular danger zone on the ocean and the routes followed by two ships that navigate without entering this hazardous region. Students were asked to construct the given scenario in GeoGebra and explore the concepts of tangents, tangent segments, and their properties. Figure 9 presents excerpts from students' GeoGebra drawings.

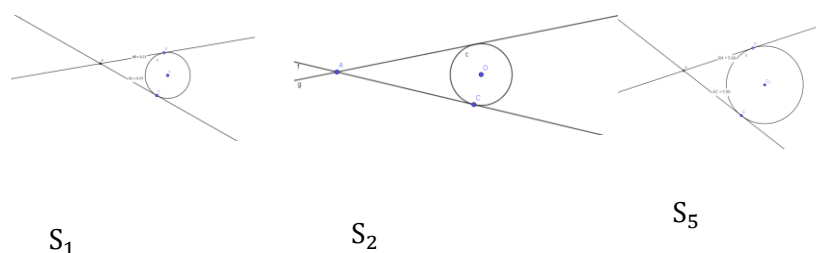


Figure 9. Students' drawings for the “Ship Routes” task

Students utilized various features of GeoGebra to construct the given scenario and respond to the questions. In doing so, they came to understand that two tangents can be drawn from a single point to a circle, and that the lengths of these tangent segments are equal. My observation note during the class is as follows:

“Three students participated in the task. In this task, S_2 quickly constructed the required figure by first creating the circle, then selecting the tangent tool and clicking on a point on the circle. In contrast, S_1 and S_5 selected two points on the circle, clicked on the tangent tool, and constructed two separate tangents that intersected at a single external point. Some students used the measurement tool to determine the lengths of the tangent segments. These students were also able to accurately define the concept of a tangent in response to the researcher's question.”

Finally, to support students in learning the concept of a tangential quadrilateral, they engaged in the *Bracelet Cans* task (see Appendix 1). In this task, students examined the properties of the three most popular bracelet containers, each represented by a polygonal model containing a circle, and were guided toward understanding the concept of a tangential quadrilateral. During a one-hour class, students were first asked to draw these polygonal models using GeoGebra, after which instructional support was provided to help them conceptualize the properties of tangential quadrilaterals. Figure 10 presents excerpts from students' drawings in GeoGebra.

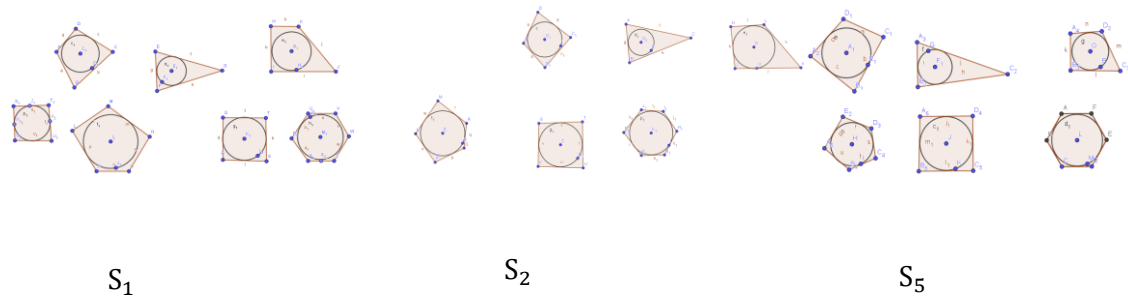


Figure 10. Students' drawings for the "Bracelet Cans" task

Students utilized various features of GeoGebra to construct the given polygons and successfully developed an understanding of the concept of a tangential quadrilateral. My observation note during the class is as follows:

"Three students participated in the task. This was the final task of our study. Some students constructed the polygons using the polygon tool, while others used the regular polygon tool. The students answered the task questions accurately."

3.2. Post-Implementation Phase

3.2.1. Findings Related to the Question on Finding the Center of a Circle

While solving this question, students employed three distinct problem-solving approaches. Half of the students (S_1 , S_2 , and S_5) developed solutions using concrete materials, whereas two students (S_3 , S_4) provided interpretations supported by underlying geometric theorems. One student (S_6) utilized both approaches in formulating their response. For example, during the interview, S_5 offered the following explanation regarding this question:

S_5 : Let's draw a circle (the student drew a circle on the screen using the circle tool with a center and a point). Well... it has a center. We drew it using the center.

R: If I now asked you to do this using pen and paper, how would you find the center?

(The student is thinking.)

S_5 : First, I would draw a circle. Then, I would cut out the circle from the paper. By folding it, it divides into two equal parts, and the center becomes evident when folded.

R: Do we fold it just once? How many times do we need to fold it?

S_5 : When folded once, it divides into two equal parts.

The student initially indicated that the center of the circle could be easily located by utilizing the features of the GeoGebra program. Subsequently, the student explained that they could find the center by creating a paper template of the circle (visualization) and folding it (artifacts). Similarly, S_1 and S_2 provided comparable explanations. These students also emphasized that the circle could be readily constructed using GeoGebra and noted that tangible materials, such as paper, could be used to arrive at the solution:

S_1 : I would draw a circle on paper. Then, I would cut out that shape from the paper and fold it in half. After that, I would fold it again from the other side. That way, I would find the center.

S_2 : I would draw a circle on paper. Then, I would fold it so that the two edges overlap. It would be folded exactly through the middle, creating a diameter. I would fold it again from the other side in the same way. The crease formed would be perpendicular to the first fold. That way, the exact center would be determined. It would be the center.

These students approached the task of drawing circles on paper from the perspective that such figures serve as visual supports in geometric reasoning. In this context, semiotic genesis was activated. On the other hand, by employing a drawing tool such as the folding method, they attempted to determine the center of the circle geometrically. Instrumental genesis played a significant role during this transition process. Consequently, the students' interpretations correspond to the Sem-Ins plane. Their emphasis on techniques like folding and cutting, which are based on physical artifacts, indicates that they were operating within the Geometry I (natural geometry) paradigm.

In contrast, S_4 drew the circle using GeoGebra and attempted to solve the problem by applying theorems. The following is S_4 's explanation regarding their geometric work in GeoGebra:

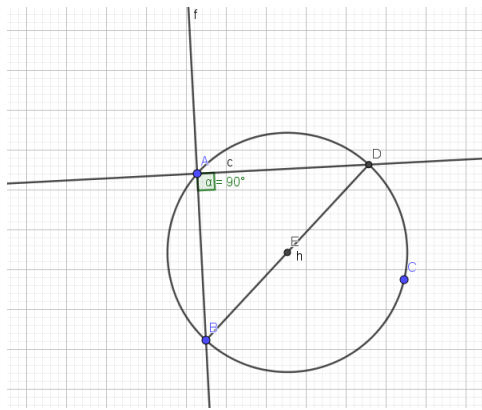


Figure 11. S_4 's work on GeoGebra

S_4 : First, I would construct a circle passing through three points.

R: Why did you start with such a construction?

S_4 : Because I think I need a line segment to find the center. Therefore, I can use points A and B (the student connected the points with a line segment). When the inscribed angle is 90 degrees, the chord it subtends is a diameter. Based on the diameter, I can find the center.

R: How so?

S_4 : When I construct a perpendicular to segment AB, the angle here will be ninety degrees. I intersect the points to find the intersection. (...then measures the angle). The angle $\angle BAD$ is exactly ninety degrees. Now, a line subtended by a ninety-degree angle will give us the diameter. (...connects points B and D). We have constructed the diameter because the line segment subtended by the ninety-degree angle is equal to our diameter. If the angle had not been ninety degrees, BD would have been a chord.

R: Were we able to find the center of the circle? I don't think we have found it yet.

S_4 : Now, we have found the diameter. From the diameter, it says we can find the midpoint and the center. We used that tool to find the midpoint.

(...finding the midpoint of points B and D).

We have determined the center of our circle.

S_4 constructed an arbitrary circle using GeoGebra (visualization). Subsequently, they recognized the need to draw a diameter to locate the center of the circle. Drawing on the theorem stating that "an inscribed angle subtended by a diameter is 90 degrees" (referential), the student attempted to identify two perpendicular lines intersecting the circle at two distinct points (points B and D). They explained that connecting these two points forms the diameter, and the midpoint of this diameter corresponds to the center of the circle. Similarly, S_3 made a comparable construction and provided explanations aligned with those of S_4 . These students activated semiotic genesis while sketching the mental image of the circle. At the same time, discursive genesis was prominent as they supported their constructions with underlying theorems (here, the inscribed angle subtended by a diameter is 90 degrees). Accordingly, their explanations can be situated within the Sem-Dis plane. Since geometric objects (e.g., the circle) in this context correspond to idealized objects in Euclidean geometry and are based on an axiomatic structure, it can be argued that these students developed a solution within the Geometry II (natural axiomatic geometry) paradigm. In contrast, S_6 offered a different interpretation from the other students:

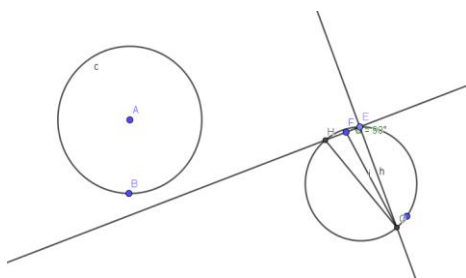


Figure 12. S_6 's work on GeoGebra

S_6 : From outside, ninety degrees... Can I find it?

R: I don't know, can you? Give it a try.

S_6 : After constructing a ninety-degree angle, it will subtend the diameter. If we obtain a right angle, I hope we can find the diameter.

The student drew two perpendicular lines intersecting on the circle. First, they connected points E and C. Then, realizing they could not find the diameter, the student, upon the researcher's suggestion, connected points H and C. Observing the chords they had drawn...

S_6 : So, do they all work? (...pauses to think).

R: Do they all work? Do they all give the center? Do you think they are all diameters?

S_6 : No, I couldn't find the diameter.

R: How would you do it on paper? Suppose I draw a circle without its center and ask you to find the center?

S_6 : I would fold the circle vertically and horizontally over itself. The point where these two creases intersect is the center of the circle.

S_6 's initial line of reasoning is similar to that of S_4 and S_3 . Likewise, the student referred to the theorem stating that "an inscribed angle subtended by a diameter is 90 degrees" and attempted to construct two perpendicular lines. However, upon failing to identify the desired perpendiculars, the student shifted toward a paper-folding strategy. This indicates a transition from the Sem-Dis plane to the Sem-Ins plane.

Overall, students' geometric reasoning in response to the questions is summarized in Table 3.

Table 3. Tally Table of Students' Geometric Work for Question 1

Student	Response Time	Paradigm			Genesis			Plane		
		Geo I	Geo II	Geo III	Sem	Ins	Dis	Sem-Ins	Sem-Dis	Ins-Dis
S_1	0' 41''	X			X	X		X		
S_2	1' 37''	X			X	X		X		
S_3	4' 23''		X		X		X		X	
S_4	4' 19''		X		X		X		X	
S_5	1' 21''	X			X	X		X		
S_6	5' 47''	X	X		X	X	X	X	X	

Upon examining Table 3, it is evident that the majority of students provided responses aligned with the Geometry I paradigm. No responses corresponding to the Geometry III paradigm were observed. All students actively employed semiotic genesis in their problem-solving. In addition, some students also utilized instrumental and discursive genesis. Finally, students' responses were distributed across the Sem-Ins and Sem-Dis planes. No student produced a response situated within the Ins-Dis plane. One student (S_6), however, initially responded within the Geometry II paradigm and later gave a response aligned with the Geometry I paradigm (Sem-Dis $\rightarrow$ Sem-Ins).

3.2.2. Findings Related to the Question on Drawing a Tangent to a Circle from a Point Outside the Circle

While solving this question, students employed two different problem-solving approaches. Five students (S_1 , S_2 , S_5 , S_3 , and S_6) developed solutions using artifacts, while only one student (S_4) provided a geometric interpretation supported by prior theorems. For example, S_1 offered the following explanation in response to this question:

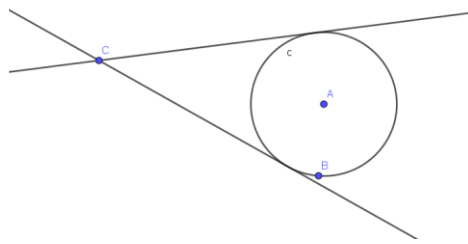


Figure 13. S_1 's work on GeoGebra

S_1 : We're going to draw a tangent. But it says from a point outside. So, there must be a point outside the circle. Then let's go to the point. If we place a point here... (places a point outside the circle). Now we'll draw tangents from this point. We could use the tangent tool, but we could also use the line segment tool.

R: So, how would you draw it without using the tool?

S_1 : If we draw a circle from here and place a point here... (draws a circle and selects a point outside it). We could draw a line, for example.

R: Can you move the initial figure? Can you check whether anything has changed?

At first, the student thought that the tangency was preserved in both constructions, but as they continued moving the figures, they realized that the tangency was lost.

R: What do you think is the difference between the two constructions? What could you have done differently to ensure the second one remained unchanged?

S_1 : What could I have done?... (thinks) I don't know. I guess I don't know. I would probably just use the tangent tool again.

The student indicated that they could solve the problem by using the "tangent from an external point" feature in GeoGebra. When asked how they would approach the task without using this feature, the student first constructed a circle arbitrarily (*visualization*). Then, using GeoGebra (*artifacts*), they attempted to construct lines that were tangent to the circle at two different points. In doing so, the student aimed to build a structure that satisfied the tangency condition (*construction*). However, upon moving the figure, they observed that tangency

was not preserved. This suggests that the student focused primarily on visual representation rather than ensuring the mathematical accuracy of the construction. Similarly, S_2 , S_5 , S_3 , and S_6 expressed comparable reasoning. As an example, the explanation provided by S_3 is given below:

S_3 : Once again, let's draw a circle by clicking the center and circle tool.

(The student selected the line tool and drew what they believed to be a tangent from a point to the circle.)

R: Can you draw the figure without using the tangent tool?

S_3 : If we intersect the circle with the point on it, let's see if anything changes when we move it. This is my first time trying this.

(...After performing the intersection, the student moved the figure.) It changes again. So, it doesn't work.

R: Do you think there's another way to draw a tangent without using the tool? If I gave you a paper-and-pencil task, how would you draw a tangent from a point outside the circle?

S_3 : I have no idea.

These students approached the task of drawing a circle based on the belief that geometric figures serve as visual aids in geometric reasoning. In this context, semiotic genesis was activated. Additionally, by using GeoGebra, that is, by opting for an artifact, they attempted to construct a figure that they believed represented a tangent from an external point to the circle. Instrumental genesis played a significant role in this transition process. Accordingly, the students' interpretations correspond to the Sem-Ins plane. Rather than relying on a theoretical foundation, they attempted to create the desired configuration solely based on its visual appearance. This indicates that they were operating within the Geometry I (natural geometry) paradigm.

In contrast, S_4 used GeoGebra to construct the circle and attempted to solve the problem with the support of geometric theorems. S_4 's explanation regarding their geometric construction in GeoGebra is as follows:

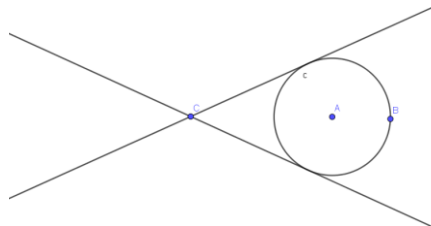


Figure 14. S_4 's work on GeoGebra

S_4 : Since it says "from outside the circle," I would first construct my circle. Then, because it mentions a point outside, I would place a point outside the circle. It's asking me to draw a tangent. A tangent is a line segment that touches the circle at exactly one point. So what can I do? ... By selecting the tangent tool and then clicking on the point and the circle, I was able to construct the tangents.

R: Would you have considered a different approach?

S_4 : Actually, we could have done something else. The tangents are perpendicular to our circle.

Following this statement, the student pointed to the point where the line touches the circle. So, we could have drawn radii from the circle to those points and constructed the tangents that way.

R: What would you do next, for example? You've drawn the radii, then what?

S_4 : Then, we would connect them again at a single point.

The student indicated that, by using the tangent tool in GeoGebra, they could draw tangent lines from a point outside the circle. When asked how they would approach the problem without using this tool, the student referred to the theorem stating that tangents are perpendicular to the radius at the point of contact (referential), after having constructed the circle arbitrarily (visualization). In this context, the student emphasized that connecting the point of tangency to the circle's center with a radius (proving) would produce the desired result. During the construction of the circle, semiotic genesis was activated. At the same time, discursive genesis became prominent as the student supported the condition of tangency from an external point with prior theorems (in this case, the theorem stating that a tangent is perpendicular to the radius at the point of contact). Accordingly, the student's explanation is situated within the Sem-Dis plane. It can therefore be concluded that the student developed a solution aligned with the Geometry II (natural axiomatic geometry) paradigm.

Overall, students' geometric reasoning in response to the questions is summarized in Table 4.

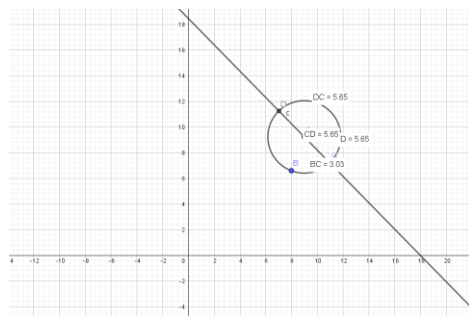
Table 4. Tally Table of Students' Geometric Work for Question 2

Student	Response Time	Paradigm			Genesis			Plane		
		Geo I	Geo II	Geo III	Sem	Ins	Dis	Sem-Ins	Sem-Dis	Ins-Dis
S ₁	3' 43''	X			X	X		X		
S ₂	4' 54''	X			X	X		X		
S ₃	3' 38''	X			X	X		X		
S ₄	2' 13''		X		X		X		X	
S ₅	3' 51''	X			X	X		X		
S ₆	6' 51''	X			X	X		X		

Upon examining Table 4, it is evident that the majority of students provided responses aligned with the Geometry I paradigm. No responses corresponding to the Geometry III paradigm were observed. Only one student (S₄) gave a response reflecting the Geometry II paradigm. All students are actively engaged in *semiotic genesis*. In addition, some students also utilized *instrumental genesis*. However, *discursive genesis* was employed by only one student. Finally, the students' responses were distributed across the Sem-Ins and Sem-Dis planes, with no responses situated in the Ins-Dis plane.

3.2.3. Findings Related to the Question on Dividing a Circle into Two Equal Parts

In this question, five students (S₁, S₂, S₅, S₃, and S₄) developed solutions based on their intuition, while only one student (S₆) supported their intuitive reasoning with prior theorems. In their explanations, S₆ also referred to the use of concrete materials and proposed alternative approaches. For example, during the interview, S₃ provided the following explanation in response to this question:

**Figure 15.** S₃'s work on GeoGebra

(The student drew a circle and then drew a line passing through the center of the circle.)

R: Do you think the line you drew divides the circle into two equal parts?

S₃: Yes, it does.

R: Do you think the line you drew passes through the circle?

S₃: I passed it through the center.

R: Does every line that passes through the center divide the circle into two equal parts? Let's draw another line. (The student draws lines passing through the center.)

R: If you do this, will the circle still be divided into two equal parts?

S₃: No, it won't. (The student seemed confused.)

R: Can you move the circle, enlarge or shrink it?

(The student adjusted the size of the circle.)

R: Now let's delete the other lines so only one remains. (The student made the requested adjustment.)

R: Now, if we move the circle and measure the arcs, will they always be equal? (The student tries to measure the arc lengths.)

*The student was measuring straight-line distances between two points, not arc lengths.

S₃: The lengths turned out different. So it didn't divide it into two equal parts.

The student intuitively believes that a circle can be divided into two equal parts by a line passing through its center. In this context, the student drew a line segment from the center that intersects the circle at two distinct points (*visualization*). Subsequently, they used the GeoGebra software to manipulate the figure- enlarging and shrinking it, and attempting to measure arc lengths to determine whether the line segment was indeed a diameter (*artifacts*). Similarly, students S₂ and S₁ provided comparable explanations. In addition to these, the student S₅ proposed a different approach.

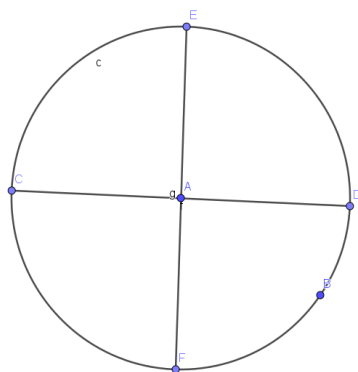


Figure 16. S_5 's work on GeoGebra

S_5 : The center is already known here. If I draw a line segment passing through the center, it would divide the circle into two equal parts. Arcs subtended by diameters are equal. (The student drew horizontal and vertical line segments passing through the center of the circle.)

R: Let's think about this question in a paper-and-pencil context. How would you divide a circle into two equal parts?

S_5 : I would first determine the center.

R: How would you do that? How can the center of a circle be found?

S_5 : With the help of a compass.

R: And how would you use a compass to determine the center in a paper-and-pencil setting?

S_5 : Well, when we press the compass onto the paper and rotate it to draw a circle, we are rotating it around the center. So, the point where we place the compass is directly the center.

R: Can you think of any other method?

S_5 : If it were on paper, I could cut and fold it.

R: How would you do that, for example?

S_5 : I would draw a circle on paper, cut it out, and then fold it into two equal parts. That would again divide it into two equal parts.

Initially, S_5 , like S_3 , S_2 , and S_1 believes that the way to divide the circle into two equal parts is by determining the diameter. In addition to this, the student asserts that the center of the circle can be found using a compass (artifacts), and that the diameter can also be constructed by drawing the circle on paper (visualization), cutting it out, and folding it (artifacts).

In contrast to the reasoning of these students, S_4 aimed to locate the center point by identifying the intersection of the lines:

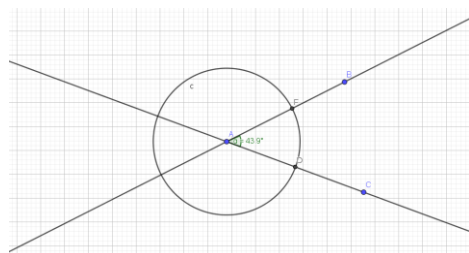


Figure 17. S_4 's work on GeoGebra

S_4 : How would I divide it? First, I would construct a line segment. Then, I would define a circle on that segment. Right. First, I identified three points. Then, I created the line segment AB using the line segment tool. After that, I constructed a second line segment.

R: You have constructed the line segments. What will be your next step?

S_4 : I think the line segments will help me divide the circle into two equal parts. I will check if I can equalize them. I marked a point between A and B and intersected it. If we find the midpoint of A and C... Then, what can I do next?

R: Why do you want to find the midpoint? What are your thoughts?

S_4 : I am thinking of drawing a circle. I will draw the circle at point A. The distance between points A and D will be equal to that between points C and D. But what purpose will this serve? The student drew a circle at point A, where the lines intersect, and examined the figure.

R: Do you have any other ideas?

S_4 : Actually, what if I measure the angles? (The student measured the central angles in the circle.)

S_4 appears to consider constructing the radius on the given lines and marking the center as the intersection point of these lines (visualization). This form of intuitive reasoning differs from that of the previously discussed students.

Overall, students intuitively conceptualize dividing the circle into two equal parts. While some attempt to construct the diameter, others focus on obtaining information about the radius and the center. In this context, semiotic genesis is activated. Conversely, students also attempted to perform these operations using GeoGebra, thereby engaging with a drawing tool. Instrumental genesis played a significant role during this transition. Accordingly, the students' interpretations correspond to the Sem-Ins plane. They generated responses based on

intuition rather than formal proof, indicating that they operated within the Geometry I (natural geometry) paradigm. In contrast, S_6 provided the following explanation during the interview regarding this question:

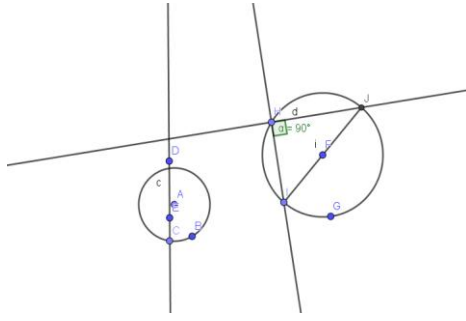


Figure 18. S_6 's work on GeoGebra

S_6 : I'm thinking directly about the diameter of the circle. In other words, it might work if we fold it as if we were folding it in half.

R: What are you going to do in this question?

S_6 : First, let me draw the circle. If I draw a line passing through the center, it can be divided into two equal parts.

R: If we drag the circle or the line, do you think it will always be divided into two equal parts? (The student drags the line.)

S_6 : Ah... it didn't work.

R: So, do you think there is another way to divide the circle into two equal parts?

S_6 : After drawing the inscribed angle, when the inscribed angle measures 90 degrees, the triangle formed corresponds exactly to the diameter. First, let me draw a circle. Then, I will draw a line intersecting the circle and a line perpendicular to this line. (The student measures the angle and confirms that the angle between the lines is 90 degrees.) This segment here is the diameter (pointing to points I and J). I have divided the circle into two equal parts.

R: How would you divide a circle into two equal parts using pen and paper?

S_6 : I would start drawing chords from the bottommost point of the circle. Then, I would identify the longest one...

R: How would you determine the longest of these chords?

S_6 : I don't know. I would fold another piece of paper. I would draw a circle in the center of the paper, cut out the circle, and fold it in half.

S_6 considers it necessary to draw the diameter (*visualization*) to divide the circle into two equal parts. To justify this, the student refers to the theorem stating that "an inscribed angle subtended by a diameter is 90 degrees" (*referential*) and constructs two perpendicular lines, confirming that the angle between them is 90 degrees (*proving*). As an alternative approach, the student suggests drawing chords from the edge of the circle, sketching the circle on paper (*visualization*), and then cutting it out and folding it in half (use of drawing instruments). In the initial part, the student intuitively believes that dividing the circle into two equal parts can be achieved by drawing a line or a line segment (i.e., a diameter) that passes through the exact center of the circle. At this stage, semiotic genesis is predominantly active. However, since the student employs a prior theorem (i.e., an inscribed angle subtended by a diameter is a right angle) to construct the diameter, discursive genesis also becomes significant. Therefore, the explanation is situated within the Sem-Dis plane. It can thus be argued that the student has produced a solution consistent with the Geometry II paradigm (natural axiomatic geometry). On the other hand, in the two alternative approaches proposed by the student, the reasoning aligns with the Geometry I paradigm (natural geometry). During the process of drawing chords from the bottom edge of the circle, semiotic genesis is activated, while instrumental genesis is involved when identifying the longest chord. This marks a shift into the Sem-Ins plane. Similarly, during the act of drawing the circle, semiotic genesis is again activated, while cutting and folding the circle engages instrumental genesis, thus, once more leading to a response situated within the Sem-Ins plane.

Overall, students' geometric work in response to the questions is summarized in Table 5. Upon examining Table 5, it is observed that students predominantly provided responses corresponding to the Geometry I paradigm. No responses aligned with the Geometry III paradigm were identified in the questions. All students actively employed representational genesis. In addition, some students also utilized instrumental genesis, while discursive genesis was employed by only one student. Lastly, students' responses were distributed across the Sem-Ins and Sem-Dis planes. No student was found to have developed responses within the Ins-Dis plane. One student (S_6), however, initially responded within the Geometry II paradigm and subsequently provided a response corresponding to the Geometry I paradigm (Sem-Dis $\rightarrow$ Sem-Ins).

Table 5. Tally Table of Students' Geometric Work for Question 3

Student	Response Time	Paradigm			Genesis			Plane		
		Geo I	Geo II	Geo III	Sem	Ins	Dis	Sem-Ins	Sem-Dis	Ins-Dis
S ₁	3' 16''	X			X	X		X		
S ₂	2' 13''	X			X	X		X		
S ₃	5' 54''	X			X	X		X		
S ₄	5' 05''	X			X	X		X		
S ₅	2' 04''	X			X	X		X		
S ₆	7' 14''	X	X		X	X	X	X	X	

4. Discussion and Conclusion

Dynamic geometry software offers significant opportunities for shaping students' engagement with geometric tasks (Gomez-Chacon & Kuzniak, 2015; Gomez-Chacon et al., 2016). In this study, I focused on the subject of the circle, a field frequently noted in both my own teaching experience and the existing literature as a source of learning difficulty for students, and examined my students' geometric reasoning within this context. To explore the influence of technology-based instruction, specifically the use of dynamic geometry software (in particular, GeoGebra), on students' geometric work, I employed the methodology of action research. My familiarity with GeoGebra as a powerful visualization tool for geometric concepts stems from both my undergraduate and graduate-level coursework. This software can be used for a variety of purposes, including constructing geometric figures, discovering relationships, dynamically observing transformations (especially through the use of sliders), building geometric models, and engaging in processes of proof and generalization. The extensive features of GeoGebra and its adaptability to different instructional aims have made it a frequently preferred tool in mathematics education (Kılıç & Kaleli-Yılmaz, 2024). In this regard, learning environments grounded in GeoGebra are being developed, and technology-supported instructional tasks are being designed to enhance geometry teaching and learning.

Difficulties experienced in learning the concept of the circle often stem from the lack of a concrete representation in traditional instructional settings. In conventional environments, students are generally presented with definitions and properties of the circle, followed by sample problems based on these formal descriptions. However, the integration of technology into classrooms has created opportunities for teachers to raise awareness and enhance conceptual understanding of such abstract topics. In this context, the present study sought to utilize the affordances of technology by designing and implementing tasks related to the circle in a dynamic geometry environment. To this end, I developed and implemented eight instructional tasks using GeoGebra. During the implementation phase, students were able to construct both fundamental and auxiliary elements of the circle as required in the tasks, and they effectively used dynamic features such as dragging. As a result, the process of learning circle-related concepts became more accessible. This ease of learning was also reflected in students' responses during the clinical interviews. In the clinical interviews, it was observed that students' geometric work predominantly focused on the Sem-Ins and Sem-Dis planes. This indicates that students operated within the frameworks of Geometry I and Geometry II paradigms. However, it is expected that students at the high school level engage primarily with the Geometry II paradigm (Çalışkan-Dedeoğlu, 2016). Despite this, the participating students were able to generate responses consistent with the Geometry II paradigm only through engagement with the dynamic geometry tasks. Moreover, the responses of two students indicated transitions between the Sem-Ins and Sem-Dis planes. These students initially produced answers aligned with the Geometry II paradigm, but later regressed to responses situated within the Geometry I paradigm. This phenomenon of students shifting between cognitive planes while responding to the same geometric task aligns with the findings of Gomez-Chacon et al. (2016), in which such transitions were described using the metaphor of a "zig-zag" pattern in students' geometric problem solving.

Although students did not produce responses within the Ins-Dis plane in this study, it can still be concluded that the implemented tasks contributed meaningfully to the development of their geometric thinking. At the beginning of the process, students primarily approached the tasks with a focus on visualization. However, toward the end of the implementation, some students began to incorporate elements of proof into their reasoning, albeit to a limited extent. This indicates that my instructional aim to support students in transitioning from the Sem-Ins plane to the Sem-Dis plane, that is, from Geometry I to Geometry II, was at least partially achieved. This effect

was also evident in a written exam administered approximately one month after the intervention, in which students who initially experienced difficulties with the topic of the circle were able to provide correct responses. Based on my teaching experience, I have observed that topics such as the circle, when taught through traditional instruction, are often forgotten over time. Many students preparing for the university entrance exam encounter persistent difficulties with concepts such as arc length and angle measures. These challenges often stem from their inability to form accurate mental visualizations of the circle and its properties. When students fail to concretize the concept of the circle in their minds, they tend to struggle with related problems as well. In comparison to traditional instructional approaches, I found that teaching the circle through tasks conducted in the GeoGebra environment was more effective. The dynamic and technology-enhanced learning environment appeared to increase student motivation, foster greater engagement, and generate sustained interest in the tasks. These factors played a significant role in facilitating the conceptual understanding of geometric constructs related to the circle.

The immediate administration of the clinical interview following the implementation of the eight instructional tasks in the first phase of this study introduced certain limitations. The limited time interval between the two stages led students to rely heavily on the dynamic geometry environment when responding to the interview questions, thereby restricting the originality and breadth of their reasoning. For instance, when asked to determine the center of a circle, one student simply drew the circle using the software and stated that the center was already visible. It is believed that, had students been given sufficient time between the two phases, they might have distanced themselves from the technological environment and provided more elaborate and original responses to the interview questions. Additionally, it is important for teachers to possess a solid understanding of dynamic geometry software and to guide their students in learning how to use such tools. When a more flexible and exploratory learning environment is established, students' approaches and perspectives toward geometric problem solving can be more accurately observed and interpreted. Throughout the study, students were periodically asked about their perceptions of the dynamic geometry software, and the feedback received was largely positive. A prominent theme in their responses was that the use of dynamic geometry tools enhanced their visual and spatial reasoning. The ability to mentally visualize abstract geometric concepts is one of the desired outcomes in mathematics education, and this approach appeared to support that goal. Moreover, the findings of the study indicated improvements in students' abilities to construct figures based on verbal or written descriptions, make predictions, and formulate mathematical explanations. These developments are expected to positively contribute to students' future achievement in geometry.

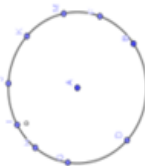
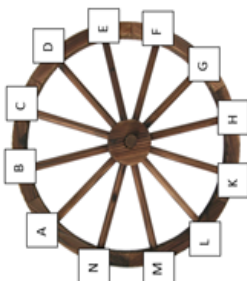
5. Recommendations

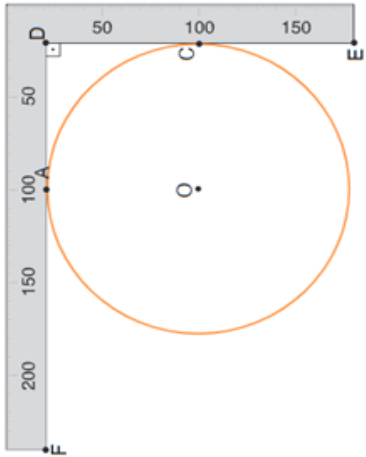
In this study, students were directed exclusively to work within dynamic geometry environments, which in turn influenced the nature of their responses. For future research, it is recommended that students not be limited to a single type of environment and instead be provided opportunities to engage with tasks across multiple settings. Furthermore, as this study was conducted using an action research methodology, future studies may adopt a quasi-experimental design. For example, researchers could include an experimental group engaging with tasks in traditional settings and a control group working in dynamic geometry environments at the same grade level. Such a design would allow for a comparative analysis of the effects of dynamic geometry environments versus traditional environments on students' geometric reasoning, development, and progress.

Funding: No funding was reported for this study.

Declaration of interest: The author declares no conflict of interest.

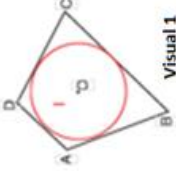
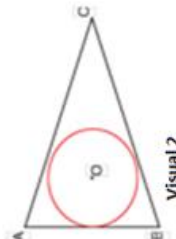
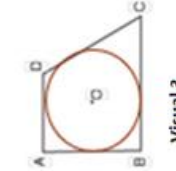
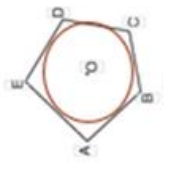
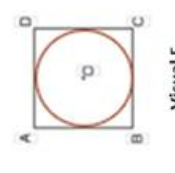
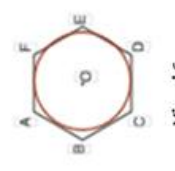
Appendix 1. Tasks Used in the Implementation Process

Task 1: Spider Web Objective: To distinguish between the concepts of central angle and inscribed angle in a circle. Spider webs are structures constructed using silk threads, a protein-based material produced by spiders, typically for capturing prey. In this activity, spiders are assumed to have built their webs on a circular vent hole located in a house. The spiders are positioned respectively at points J, I, H, K, and G. The start and end points of each spider's web-building route are provided in Table 1. Each spider spins its web in a straight line from its starting point to its ending point. In Figure 1, the points I, A, B and K, A, D are collinear, respectively. - Draw the paths followed by the spiders on the circle using their web routes. Table 1. Web Paths Followed by the Spiders <table><tr><th>Spiders</th><th>Beginning</th><th>Finish</th></tr><tr><td>1. Spider</td><td>J</td><td>M</td></tr><tr><td>2. Spider</td><td>I</td><td>B</td></tr><tr><td>3. Spider</td><td>H</td><td>J</td></tr><tr><td>4. Spider</td><td>K</td><td>D</td></tr><tr><td>5. Spider</td><td>G</td><td>F</td></tr></table>  Figure 1. Spider Paths - Write the angles formed by the intersection of some of the paths you created on the circle, and indicate whether each angle is a central or inscribed angle in the appropriate columns of Table 2. Table 2. Classification of Angles as Central or Inscribed Angles <table><tr><th>Angle Names</th><th>Inscribed Angle</th><th>Central Angle</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	Spiders	Beginning	Finish	1. Spider	J	M	2. Spider	I	B	3. Spider	H	J	4. Spider	K	D	5. Spider	G	F	Angle Names	Inscribed Angle	Central Angle													Task 2: Wheel Objective: Being able to explain the concepts of tangent, chord, diameter, arc, and secant in a circle.  Figure 1. Wheel Model Using GeoGebra, recreate the structure shown in Figure 1. While drawing, disregard the actual thickness of the wheel. Investigate the example cases provided in the table using your constructed model and identify the corresponding geometric concept for each. Table 1. Concepts Corresponding to the Example Cases <table><tr><th>Example Case</th><th>Tangent</th><th>Cord</th><th>Diameter</th><th>Arc</th><th>Secant</th></tr><tr><td>The arc extending from point K to point D on the circle.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>The line segment connecting points N and D.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>The line segment drawn from point M to point K.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>The line that intersects the circle only at point G.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>The line segment connecting points B and H.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>The line passing through points A and E.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Based on the given information, answer the following questions. Provide a brief explanation based on your response. - There may be line segment(s) equal in length to the segment connecting points N and D. Comment: - The line segment formed by connecting the points is the longest possible segment. Comment:	Example Case	Tangent	Cord	Diameter	Arc	Secant	The arc extending from point K to point D on the circle.						The line segment connecting points N and D.						The line segment drawn from point M to point K.						The line that intersects the circle only at point G.						The line segment connecting points B and H.						The line passing through points A and E.					
Spiders	Beginning	Finish																																																																										
1. Spider	J	M																																																																										
2. Spider	I	B																																																																										
3. Spider	H	J																																																																										
4. Spider	K	D																																																																										
5. Spider	G	F																																																																										
Angle Names	Inscribed Angle	Central Angle																																																																										
Example Case	Tangent	Cord	Diameter	Arc	Secant																																																																							
The arc extending from point K to point D on the circle.																																																																												
The line segment connecting points N and D.																																																																												
The line segment drawn from point M to point K.																																																																												
The line that intersects the circle only at point G.																																																																												
The line segment connecting points B and H.																																																																												
The line passing through points A and E.																																																																												

Task 3: Drain Pipes Objective: To explain the concept of a tangent-chord angle in a circle. A circular pool with center O has been constructed inside the intersection of two perpendicular roads, as illustrated. The pool is placed in such a way that it is tangent to segment $[FD]$ at point A and to segment $[DE]$ at point C. The drainage pipes to be installed beneath the pool are positioned as follows: A drainage pipe, long enough and starting from point A, passes through the center of the pool. The other endpoint of this pipe on the circle is named point B (The width of the road is disregarded). Using GeoGebra, construct the figure provided below.	Task 4: Embroidery Hoop Objective: Being able to explain the concepts of interior and exterior angles in a circle. Yildiz has hung her embroidery hoop on the wall of her room using black strings and used red strings for decorative purposes. All the strings are tightly stretched. The hoop model, as hung by Yıldiz, is shown in Figure 1.
 Figure 1. Pool model	Figure 1. Embroidery Hoop Model The nail on the wall is labeled as point A. The endpoints of the black strings are labeled as C, D, F, and G, while the endpoints of the red strings are labeled as H, K, L, and M. The intersection points of the strings are labeled as N, P, R, and S. Yıldiz has fixed two of the black strings to the hoop at points B and E. (The thickness of the strings and the hoop is to be neglected.)
1) What types of angles are $\widehat{BCE}$ and $\widehat{BCD}$, which are formed by the intersection of chord $[BC]$ and the tangent segment $[CE]$ at the point of tangency C of the pool? 2) Name the tangent-chord angles formed at point A in the figure. 3) What is the relationship between the measure of a tangent-chord angle and the measure of its intercepted arc? 4) What observation can you make regarding segment $[AB]$ in the figure? 5) Compare the measures of arc AB and arc BAF. 6) Based on your constructions, circle the correct statement below: a) The measure of a tangent-chord angle is equal to half / twice the measure of the arc it intercepts. b) An inscribed angle and a tangent-chord angle that intercept the same arc are equal / different in measure.	1. Let T be the set of angles formed at points N, P, R, and S within the interior of the hoop, and let Y be the set of angles whose vertex is at point A and whose sides are formed by the black strings. Represent the sets T and Y using a Venn diagram. 2. Identify the fundamental components of a circle (e.g., chords, tangents, arcs, etc.) that are used in forming the angles in sets T and Y. 3. Specify in which region of the circle (interior or exterior) the angles in T and Y are located. Provide a brief interpretation of the types of angles found in sets T and Y.

Appendix 1 continued

Task 5: Wastewater Treatment Project Objective: Demonstrating chord properties in a circle and performing related calculations. Wastewater treatment is the process of rehabilitating water, a fundamental element of life, after its use for domestic or industrial purposes, particularly as it becomes increasingly polluted over time.	Task 6: Ammo Delivery Routes Objective: To determine the positional relationships between a circle and a line.
Figure 1. Neighborhoods (A, B, C, D, E) In Figure 1, neighborhoods A, B, C, D, and E are shown as located around a circular area. The sewer wells of adjacent neighborhoods are connected via pipes of different colors: black, orange, green, and red, with lengths of 800 m, 600 m, 600 m, and 900 m respectively. The wastewater treatment facility is located at point O, the center of the circular region, and the distance from the facility to each neighborhood is 500 m. A company will lay wastewater transport lines between neighborhoods, aiming to calculate the most cost-effective routing. The lines will be laid as straight paths between the center and each neighborhood. The cost per meter of piping is set at 200 TL, and this amount will be equally shared by the residents of the two neighborhoods involved. Use GeoGebra to construct the described configuration. Then, answer the following questions: • Which pair of neighborhoods will have the <u>lowest-cost</u> pipeline laid from the treatment facility? • Which pair of neighborhoods will have the <u>highest-cost</u> pipeline laid from the treatment facility? • Explain the properties or features you observed and used while forming your answers to the above questions.	Figure 1. Ammunition Delivery Routes In the visual above, a military helicopter located at point A (1, -7) will drop ammunition at certain points on a circle centered at M (1, -2) with a radius of 4 units. The helicopter will move along a straight path, drop the ammunition, and then continue along the same route. The pilot may choose any of the following linear equations as potential flight paths: k: $3x + 4y + 25 = 0$, l: $3y - 7x + 28 = 0$ and m: $11y - 7x + 84 = 0$. Using GeoGebra, construct the figure described above and answer the following questions: • Determine how many times the military helicopter at point A (1, -7) will drop ammunition if it follows each of the routes defined by the above linear equations. • If the pilot prefers the route on which only one drop is made, find the distance from point A (1, -7) to the drop point along that route. • Find the minimum distance between the circle's center and each of the three routes. Based on this information, mathematically express the positional relationships between a circle and a line.

Task 7: Ship Routes Objective: To be able to explain the concepts of tangent and tangent segment. In the figure below, the routes followed by a cargo ship and an oil tanker navigating over the ocean are represented by the lines d_1 and d_2 respectively. A dangerous location on the ocean is symbolically modeled by a circle centered at point O. The ships have adjusted their routes in such a way that they do not enter the circular danger zone centered at O.	 Figure 1. Ship Routes The routes d_1 and d_2, followed by the ships, intersect the circle only at points B and C, respectively. The lines d_1 and d_2, which represent the ships' routes, are tangents to the circle centered at O. 1) Based on this, define the concept of a tangent. 2) The routes followed by the ships intersect at point A. The line segments between points A and B, and between points A and C, are tangent segments. Based on this, define the concept of a "tangent segment". 3) Since the distances from point A to point B and from point A to point C are equal due to the properties of tangent segments, what conclusion can you draw about the lengths of tangent segments drawn from a point outside the circle?												
Task 8: Bracelet Cans Objective: To be able to define a tangential quadrilateral.	 Visual 1  Visual 2  Visual 3  Visual 4  Visual 5  Visual 6 A jeweler designs bracelet cans using various polygonal models and presents these designs for customer voting through an online survey. All bracelet cases are constructed in such a way that the circle surrounding the bracelet is tangent to the sides of the case. Customers complete the survey by assigning the highest score to the model they like the most and the lowest score to the one they like the least. As a result of the voting, the designs shown in Visual 1, Visual 3, and Visual 5 receive the highest scores and are selected as the top three models. The designer summarizes the common features of these case models in Table 1. Table 1. Features of the Bracelet Can <table><tr><th>Feature of the Bracelet Can</th><th>Visual 1</th><th>Visual 3</th><th>Visual 5</th></tr><tr><td>The bracelet can has four sides.</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td></tr><tr><td>The sides of the quadrilateral modeling the bracelet can are tangent to the circle surrounding the bracelet.</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td></tr></table> Provide an interpretation regarding the quadrilaterals ABCD, which model the bracelet cases shown in Visuals 1, Visual 3, and Visual 5, whose common features are listed in the table.	Feature of the Bracelet Can	Visual 1	Visual 3	Visual 5	The bracelet can has four sides.	✓	✓	✓	The sides of the quadrilateral modeling the bracelet can are tangent to the circle surrounding the bracelet.	✓	✓	✓
Feature of the Bracelet Can	Visual 1	Visual 3	Visual 5										
The bracelet can has four sides.	✓	✓	✓										
The sides of the quadrilateral modeling the bracelet can are tangent to the circle surrounding the bracelet.	✓	✓	✓										

Geometrik Çalışma Uzayları Bağlamında Lise Öğrencilerinin Dinamik Geometri Ortamlarındaki Çalışmalarının Yorumlanması

1. Giriş

Geometrik kavramlar sadece okul yıllarında değil, yaşadığımız dünyada farkında olmadan her an karşımıza çıkmaktadır. Çocuklar oyunlar yoluyla daha okula gelmeden geometriye ilişkin birçok informal öğrenmeye sahip olmaktadır. Erken yaşlarda çok çeşitli geometrik şekillerle karşılaşmakta, şekilleri ve büyüklükleri algılamaya başlanmaktadır (van Hiele, 1999). Okula başladıklarında ise, küçük sınıflarda somut nesneler arasındaki ilişkileri görebilme, bu nesnelerin birbirlerine göre pozisyonlarını tanımlayabilme öğrencilere öğretilmektedir. İlerleyen sınıflarda, öğrencilerden geometrik şekillerin özelliklerinin karşılıklı ilişkilendirilmesi, sınıflandırılması, geometrik yerlerin inşası ve onlarla ilgili önermelerin kanıtlanması gibi davranışlar beklenmektedir. Kısacası, bireyler yaşamları boyunca geometrik becerilerini kullanmaya ihtiyaç duymaktadır. Geometri hayatımızda bu denli büyük bir yere sahip iken hem araştırmacılar hem de öğretmenler olarak bu alanı doğru anlamak, anlamlandırmak ve yorumlamak da büyük önem kazanmaktadır.

Günümüzde bilgisayar teknolojisinin sürekli gelişmesi sonucunda, öğretim yazılımlarının hem niteliği hem de niceliği artmaktadır. Bunlardan biri olan dinamik geometri yazılımları sayesinde öğrenciler geometrik çizimler oluşturabilmekte, geometrik şekil ve yapılarla bunların karakteristik özelliklerini ve birbirleriyle olan ilişkilerini öğrenmektedirler. Bir geometrik şekli iki veya üç boyutlu uzayda değişik açılardan inceleyebilmektedirler. Dinamik geometri yazılımları içinde en çok bilinen ve kullanılanlar olarak GeoGebra, Cabri ve Geometer's Sketchpad ön plana çıkmaktadır. Özellikle son yıllarda dinamik geometri yazılımlarının derslerde kullanılmasıyla birlikte öğrencilerin geometriye karşı ilgileri de giderek artmaya başlamıştır. Nitekim National Council of Teachers of Mathematics [Ulusal Matematik Öğretmenleri Birliği] (NTCM, 2000), okul matematiği prensipleri ve standartlarında, öğrencilerin geometri anlama düzeylerinin gelişmesinde, dinamik geometri yazılımlarının önemli ve gerekli olduğu vurgulanmaktadır. Benzer vurguları yeni matematik öğretimi programında da görmekteyiz. Liseye ilişkin programda öğrencilerden bu yazılımları kullanarak öğretmenin hazırladığı geometrik yapılar üzerinde etkileşimli yorumlamalar yapabilmelerinin beklenildiği ifade edilmektedir (MEB, 2024).

Bu yeni araçlar, geometrik yapıları oluşturma ve doğrulama yöntemlerini değiştirerek geometri öğrenme sürecinin doğasını da değiştirmiştir. Böylece, görselleştirme ve deneye yeni bir boyut katarak öğrenci çalışmasının bilişsel doğasını derinden etkilemiştir (Kuzniak, 2014). Houdement ve Kuzniak (1999) bu farklılıkları iki grupta özetlemektedir: Birincisi, bireylerin küçük yaşlarında daha çok uzamsal bilgi ve becerilerini kullanarak geometri yapmalarını içeren “ilkokul tipi geometri” ikincisi ise matematiğin vektörel uzay, lineer cebir gibi daha ileri düzey alanlardaki uygulamaları içeren ispata dayalı “hakiki geometri”. Houdement ve Kuzniak (1999), geometri eğitimindeki bu farklılığı açıklamak için “geometrik paradigmlar” kavramını tanıtmıştır. Kuzniak, daha sonra geometrik paradigmlar ile desteklediği ve öğrenme ortamında çalışılan geometrinin doğasını tanımlayan bir model ileri sürmüştür (Kuzniak, 2006). Kuzniak'ın "Geometrik Çalışma Uzayları (GÇU)" modeli geometrik bilginin edinimi ve kullanımı sırasında farklı bilişsel ve epistemolojik düzeyleri tanımlayarak, öğrencilerin ve öğretmenlerin geometrik kavramlarla nasıl etkileşimde bulunduklarını incelemeyi amaçlar (Kuzniak, 2014; Kuzniak & Richard, 2014). Model üç temel çalışma uzayı içermektedir: Doğal çalışma uzayında, öğrenciler van Hiele (1999)'nin birinci ve ikinci düşünme düzeyindedir ve kişisel deneyimlerine dayanarak şekilleri ve özellikleri dış görünüşlerine göre tanımlar; örneğin, üçgenin köşelerinin keskin olduğu veya karelerin dört eşit kenara sahip olduğu gibi görsel algılar ön plandadır. Aksiyomatik çalışma uzayında, öğrenciler van Hiele (1999)'nin üçüncü ve dördüncü düşünme düzeyinde olup önermeleri kanıtlayarak ve aksiyomlara dayalı çıkarımlar yaparak çalışırlar; örneğin, bir öğrencinin Thales'in eşlik bağıntılarını kullanarak ikizkenar üçgenin taban açılarının eşit olduğu sonucunu çıkarması gibi. Bu iki çalışma uzayından farklı olarak modelde bir de araçsal çalışma uzayı yer almaktadır. Bu çalışma uzayında öğrenciler sezgisel ve aksiyomatik yaklaşımları birleştirerek geometrik yazılımları örneğin, GeoGebra veya cetvel ve pergel gibi araçları kullanarak keşifler yapar ve hem görsel deneyimlerden hem de formal ispatlardan yararlanır.

Bu araştırma, bir lise öğretmenin Kuzniak vd.'in (2016) modelini kullanarak öğrencilerinin hangi çalışma uzayında bulunduklarını daha derinlemesine analiz ederek uygun öğretim stratejileri geliştirmek arzusundan ortaya çıkan bir çalışmadır.

1.1. Teorik Çerçeve

Bu bölümde ilk olarak Kuzniak vd.'nin (2016) modelindeki geometrik paradigmlar, farklı geometriler ve GÇU ele alınacaktır.

1.1.1. Geometrik Paradigmalar ve Üç Temel Geometri

Geometrik paradigmalar, geometri alanıyla ilgili problemleri çözen kişilerin çalışmalarını anlamak amacıyla ön plana çıkarılmaktadır (Houdement & Kuzniak; 1999, 2003). Bireyler problemlere ilişkin çözümlerini oluşturmak ve diğer insanlarla paylaşmak için ortak bir inanç, teknik ya da uygulama bütününe ihtiyaç duyarlar. Bu ihtiyaç onların benimsemeleri paradigma ile doğrudan ilişkilidir (Kuhn, 1966). Nitekim insanlar aynı paradigmaya sahip olduklarında daha kolay ve anlamlı iletişim kurabilirler. Tersine, farklı paradigmalar kavram yanlışlarını tetikler, bazı anlarda ise tam bir yanlış anlamaya sebep olabilir (Kuzniak, 2014; Kuzniak, & Rauscher, 2011). Örneğin; geometride şekilleri kullanma ve anlamlandırmada benimsenen paradigma yol gösterici olmaktadır. Bazen geometrik bir şekil ölçme sonucunda elde edilen verilerden bağımsız sadece kendi özellikleriyle de algısal olarak anlaşılabilir. Bu çeşitli, kimi zaman ise çelişkili bakış açılarını ortaya çıkarma ve sınıflandırmada geometri öğretiminde farklı paradigmalar kabul görmüştür (Kuzniak, & Nechache, 2021). Böylece okul düzeyinde öğretilen geometriyi incelemek için üç geometrik paradigmadan bahsedilmektedir: *Doğal geometri (Geometri I)*; gerçek ve duyarlı (hissedilebilir) bir uzayı içermektedir. Bu geometride ispat yapılırken çizim aletleri veya katlama, kesme gibi tekniklere sıklıkla başvurulmaktadır (Kuzniak, 2014). Böylece mekanik ve deneysel ispat önem kazanmaktadır. Geometrinin günlük hayat problemlerini çözmede araçlar sağladığı anlayışıyla paralellik göstermektedir (Kuzniak, 2018). *Doğal aksiyomatik geometri (Geometri II)*; temelleri Öklid geometrisine dayanmaktadır, gerçekle bütünleşmeden ona yaklaşan bir uzayı içermektedir. Bu geometride ispatların geçerli olması için aksiyomlar sistemi içinde geliştirilmesi gerekir. Geometrik nesnelerin (örn. şekillerin) tanımları gerçek ve somut nesnelerin bazı özelliklerine odaklansa bile, bu nesneler Öklid geometrisindeki idealize nesneler ve aksiyomatik yapıdan oluşur; dolayısıyla tanımları itibarıyla kabul edilirler (Kuzniak, 2014). *Formalist aksiyomatik geometri (Geometri III)*; okul matematiğinde yer almayıp ancak ileri matematik eğitimi almış bireylerin karşılaşabileceği bir geometridir. Bu geometride nesneler teoriktir. Aksiyomlar sistemi gerçek uzaydan kopuktur; ancak merkezi bir role sahiptir. Öklid dışı geometrilerin ortaya çıkmasını sağlayan bu paradigmada daha çok mantıksal problemlerle ilgilenilir (Kuzniak & Rauscher, 2011). Bu paradigmalar gelişimsel bir çizgide ele alınmamıştır; yani paradigmalar arasında hiyerarşik bir düzen bulunmamaktadır. Her bir paradigmanın kendine özgü bir çalışma alanı vardır ve kişilerin problemi çözmede kullandığı yöntem, problemin amacı ve benimsediği paradigmaya bağlı olarak değişmektedir (Kuzniak, 2018).

1.1.2. Geometrik Çalışma Uzayları

GÇU modeli, üç farklı paradigma arasındaki ayrıma dayalı olarak geliştirilmiştir (Artigue, 2016). Öğrenciler geometrik problemleri çözmeye çalışırken farklı paradigmalar arasında tekrarlı geçişler yaparlar. Örneğin, şekil ve araçları bir bilgi kaynağı veya bazı özelliklerin ispatlanması gibi çeşitli şekillerde kullanabilirler (Gómez-Chacón, & Kuzniak, 2015). Okul düzeyindeki geometri öğretimi esasında gözlemlenen ve farklı paradigmalar tarafından yönlendirilen bu çalışma biçimlerini sistematik bir şekilde açıklamak için GÇU modelinin temeli atmıştır (Kuzniak, 2006). GÇU, birey ile geometrik bir problem arasındaki etkileşimi yansıtan soyut bir ortam olarak düşünülebilir. Bu ortam öğrencinin problemi çözerken gösterdiği çalışmanın karakterizasyonuna yardımcı olmaktadır. Bununla birlikte, GÇU'nın yapısı, eğitim sistemine (amaçlanan veya referans GÇU), okul koşullarına (uygulanan veya uygun GÇU) ve uygulayıcılara (öğrencilerin ve öğretmenlerin kişisel GÇU) göre değişmektedir.

Öğrencinin geometrik çalışmasının özelliklerini tanımlamak için problem çözmenin hem epistemolojik hem de bilişsel yönleri dikkate alınır. Bu yönler, GÇU modelinde birbirleriyle bağlantılı iki düzlem olarak düzenlenmiştir: Çalışılan alanın matematiksel içeriğiyle (burada geometri) doğrudan ilişkili olan epistemolojik düzlem ve geometrik problemleri çözen bireylerin düşüncesiyle ilgili bilişsel düzlem (Şekil 1.a). Geometrik çalışmayı epistemolojik yönüyle ele alıp açıklamada tamamen geometrik kriterlere göre oluşturulan üç etkileşimli bileşen önemli olmaktadır: Temsil, çizim araçları ve nesnenin anlamı. Bu bileşenler aracılığıyla öğrenme-öğretme süreci geometrinin doğasına uygun olarak düzenlenmektedir. *Temsil*, bir dizi somut ve gerçek temsilleri içermektedir. *Çizim araçları*; belli çizim araçları veya yazılımları kullanarak oluşturulan çizim araçlarını kapsamaktadır. *Nesnenin anlamı*; ise çizim aracı olarak oluşturulan tanımların, özelliklerin, ilişkilerin ve önermelerin anlamlarına işaret etmektedir (Kuzniak & Nechache, 2021). Bununla birlikte, bireylerin geometrik problemler karşısında bilgilerini nasıl kullandıklarını anlamak için GÇU modelinin bilişsel düzlemine odaklanılmıştır. Bu düzlem, geometri alanıyla ilgili özellikleri içeren epistemolojik düzlem ile yakından ilişkili olup epistemolojik düzlemin bireyin zihnindeki yansıması olarak düşünülebilir. Geometride problem çözmeye ilgili bilişsel süreçleri açıklamak için bu düzlemde Duval'ın (2005) yaklaşımı ele alınmıştır. Böylece Duval'den (2005) uyarlanan görselleştirme, inşa ve ispatlama bileşenleri düzlemin temel elemanları olarak görülmektedir. *Görselleştirme*; sembollerin çözümlenmesi ve yorumlanması ile ilgilidir. *İnşa*; kullanılan ekipman ve ilgili tekniklere bağlı bir inşa sürecidir. Son olarak, *ispatlama*; doğrulamayı içeren ve teorik bir referansa dayanan süreçtir. Tutarlı ve tam bir geometrik çalışma sağlamak için bilişsel ve epistemolojik düzlemlerin birleştirilmesi gerekir. Kuzniak vd.'e (2016) göre düzlemlerin birleştirilmesi Şekil 1.a'da şematize edildiği gibi üç temel oluşum aracılığıyla mümkün olmaktadır. GÇU modeli, semiotic (gösterimsel), instrumental (araçsal) ve

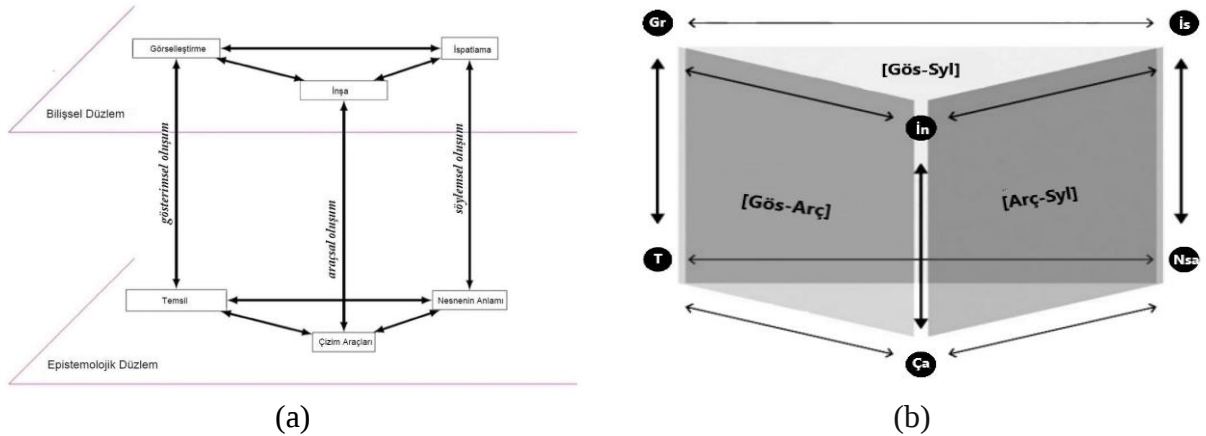
discursive (söylemsel) oluşumlarla birlikte bir üretim süreci (belirli akıl yürütme biçimleri, karar verme vb.) olarak karakterize edilir (Kuzniak & Nechache, 2021). Gösterimsel oluşum, somut nesnelerle geometrik nesnelerin birlikte çalışma işleyişini sağlar (Gomez-Chacon & Kuzniak, 2015). Duval (2005), bu süreçle ilgili iki çalışmadan bahsetmektedir: Birincisi şekillerin algısal olarak tanınmasıyla ilişkilendirilirken, ikincisi ise sembolik bir nesne olarak şekil fikriyle sembollerin daha soyut bir yorumuyla ilgilidir. Araçsal oluşum, çizim aracının inşa sürecinde işe koşulan bir dönüşümdür. Bu dönüşüm sırasında iki yönden bahsedilmektedir: Yukarıya doğru çizim araçlarından geometrik yerin inşasına geçiş yapılırken; aşağıya doğru, geometrik yerden bir geometrik inşa sürecinde kullanılan bir aracın seçimi ve doğru kullanımına geçiş söz konusudur (Gomez-Chacon & Kuzniak, 2015). İspatlama ilgili söylemsel oluşumda; matematiksel akıl yürütmeye kullanılan özelliklere anlam verilir. Bu oluşum, iki yönlü bir doğrulama sürecini içermektedir. Nesnenin anlamı çerçevesinde yapılandırılmış özellikler üzerinden desteklenen tümdengelimli veya bunun tersi, nesnenin anlamı çerçevesine dahil edilebilecek özelliklerin ve teoremlerin tanımlanmasıdır (Gomez-Chacon & Kuzniak, 2015).

GÇU modelinin işlerliği, epistemolojik ve bilişsel düzlemlerde yer alan tekil bileşenler arasındaki bir birliktelik olarak değil, iki veya üç oluşum tarafından etkinleştirilen bağlantılar olarak anlaşılmalıdır. Farklı oluşumlar ayrı ayrı çalışmayıp, geometrik çalışmaya bir anlam vermek için birbirleriyle etkileşime girmeleri gerekir. Kuzniak ve Richard (2014), her bir düzlemi meydana getiren iki oluşumun varlığıyla tanımlanan üç dikey düzleme vurgu yapmaktadır (Şekil 1b): Gösterimsel ve Araçsal oluşum [Gös-Arç] (bir geometrik düşüncenin sembollerle temsil edilmesi ve somut (çizim araçları veya yazılımlar gibi) araçlarla oluşturulması), Gösterimsel ve Söylemsel oluşum [Gös-Syl] (Bir geometrik düşüncenin görsel ve dilsel araçlarla oluşturulması), Araçsal ve Söylemsel oluşum [Arç-Syl] (bir geometrik düşüncenin hem araçsal hem de dilsel yöntemlerle birlikte oluşturulması).

[Gös-Arç], düzleminde iki temel çalışma biçimi gözlemlenebilir. Bunlardan ilki, belirli koşulları sağlayan geometrik şekillerin inşasına odaklanırken, ikincisi, kullanılan araçlar ve çizim araçları (artifact) tarafından sağlanan verilerin yorumlanmasına yöneliktir.

[Gös-Syl], düzleminde ise, yaklaşımın doğası gösterimsel veya söylemsel bileşene verilen önceliğe bağlı olarak değişir. Eğer odak noktası gösterimsel boyutta ise, görsel dönüşümler çizimlerin tanımlanmasını yapılandırır ve algısal akıl yürütmeyi şekillendirir. Buna karşılık, eğer odak noktası özelliklere dayalı varsayımsal çıkarımlar ve tümdengelimli ispat süreci ise, şekiller ve görselleştirme daha çok sezgisel bir rol üstlenir.

[Arç-Syl], bu düzlemde can alıcı nokta, ispatın deneye mi yoksa salt tümdengelimli gerekçelendirme mi dayalı olduğu sorusudur. Araçlar tarafından sağlanan verilerden sonuçlar çıkarılırsa, deneysel bir ispat söz konusudur. Diğer bir şekilde, ispat teorik bir referansa dayanıyorsa, geometrik durumları göstermek veya oluşturmak için araçlar kullanılır.



Şekil 1. (a) GÇU modeli; (b) Dikey düzlemler (Kuzniak vd., 2016, s. 725-727)

1.2. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

Uzun yıllardır devam eden meslek hayatım süresince anlattığım matematik derslerinde öğrencileri belki de en çok zorlayan konunun geometri olduğunu söyleyebilirim. Öğrenciler özellikle geometrik şekil ve yapıların özelliklerini teoremler yardımıyla araştırma, bu yapıları ilişkilendirmede ve farklı uzaylarda incelemede zorluklar yaşamaktadır. Bu zorluklar her yıl karşına gelen öğrencilerde aynı şekilde ortaya çıkmaktadır. Buna paralel olarak geometri derslerinin işlenişinde birtakım güçlükler doğmaktadır. Bunlardan birkaçı, öğrencilerin geometrik şekillerin ve uzaydaki ilişkilerin somut bir şekilde nasıl işlediğini zihninde canlandıramaması, geometriye karşı önyargılı olmaları ve motivasyon eksikliği olarak gösterilebilir. Zaman içinde bu güçlükleri

gidermek için çeşitli alternatifler üretmeye çalıştım. Nitekim bunların başında hayatımızın her alanında yer alan teknoloji gelmektedir.

Ortaokuldan liseye gelen öğrencilerin bilginin sezgi, algı ve deneysel doğrulama üzerine inşa edildiği doğal geometriden, ideal nesnelerin özelliklerinin akıl yürütme süreçlerinde kullanılmasını gerektiren doğal aksiyomatik geometriye geçmeleri beklenmektedir (Çalışkan-Dedeoğlu, 2016). İlgili çalışmalar, GÇU modelinin görselleştirme ve inşayı içeren (Gös-Arç düzlemi) süreçlerde dinamik geometri yazılımının katkısını ortaya koymaktadır (Coutat & Richard, 2011). Dinamik geometri yazılımı, geometri eğitimi alanına girerek geometriyi statik bir yapıya sahip olan kâğıt-kalem sürecinden kurtarıp bilgisayar ekranında dinamik bir hale getirmiş, öğrencilere soyut yapılar üzerine daha fazla yoğunlaşma imkânı sağlayarak aksiyomatik geometriye geçişi kolaylaştırmaktadır (Güven & Karataş, 2003). Öğrenciler araştırma ortamı içerisinde rahatça girerek keşfetme, varsayımda bulunma, test etme, formüle etme, açıklama olanaklarına sahip olmuştur. Bu açıdan bakıldığında, öğrencilerin matematiksel bilgilerine ve bilişsel kapasitelerine göre daha önce öğrendikleri bilgiler ile yeni teknolojinin sunduğu uygulamalı bilgilerden doğan çalışmanın niteliğinin arttığı ortaya çıkmaktadır. Öğretmenlik mesleğinin içinde olduğumdan öğrenciler tarafından yürütülen geometrik çalışmaları yakından gözlemleme fırsatım oldu. Bununla birlikte, sınıf içinde öğrencilerin çalışmalarını şekillendiren, geliştiren farklı öğretim teknikleri de kullandım. Yaptığım bu çalışmaları gözlemlerle değerlendirerek öğrenciler tarafından yürütülen çalışmaları anlamaya çalıştım. Öğretmen olarak sınıf içinde bir problemin çözümünü derin bir şekilde incelememe olanak tanıyan eylem araştırmasını çalışmamda kullanmaya karar verdim.

GÇU oldukça yeni bir teoridir. Bu teorenin yapılan uygulamalarla gözden geçirilmesi, genişletilmesi, iyileştirilmesi önemlidir. Uluslararası literatürde GÇU'na yönelik sınırlı çalışmalar Kuzniak ve arkadaşları tarafından yürütülmüştür (Kuzniak, 2006, 2014, 2018; Kuzniak & Rauscher, 2011; Kuzniak & Richard, 2014; Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016; Kuzniak & Nechache, 2021). Ülkemizde ise bu yönde sınırlı çalışma bulunmaktadır (İmamoğlu vd., 2023). Bu anlamda yapılan bu eylem araştırmasının oluşan boşluğu dolduracağı düşünülmektedir. Eylem araştırmasıyla kendi sınıfımda uyguladığım öğretim teknikleri sonucunda öğrencilerin geometrik çalışmalarını gözlemledim. Yıllara göre farklı stratejiler kullanarak anlattığım geometri konularında öğrencilerin geometrik çalışmalarını nasıl gerçekleştirdiklerini keşfetmeye çalıştım. İlk yıllarda hazırladığım etkinliklerle öğrencilerin geometrik çalışmalarındaki ilerleyişini izledim. Bu etkinliklerde öğrenciler sadece verilenleri kullanıyor ve basit düzeyde ispatlar yapmaya çalışıyorlardı. Bu tür uygulamaların öğrencilerin geometrik çalışmalarında bilişsel açıdan önemli bir değişime sebep olmadığını gözlemliyordum. Bu eylem araştırmasında matematik derslerine teknolojiyi katarak dinamik geometri yazılımı ile hazırlanan etkinliklerin öğrencilerin geometrik çalışmalarını nasıl etkileyeceği sorusuna cevap aranmaktadır. Araştırmanın sonuçlarının öğretmenlerin öğrencilerinin geometrik çalışmalarını planlarken uygun stratejiler belirlemelerine, müfredat geliştiricilere ve araştırmacılara yeni öğrenme ortamları oluşturmak için önemli ipuçları sunma potansiyeli olduğu düşünülmektedir.

1.3. Araştırmanın Amacı

Dinamik geometri yazılımlarının kullanıldığı öğrenme ortamlarında öğrencilerin geometrik çalışmalarını Kuzniak vd.'in (2016) modeline göre derinlemesine analiz etmek bu araştırmanın temel amacıdır. Bu amaca paralel olarak araştırmada ele alınan problemler aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

Dinamik geometri yazılımını temel alan matematik dersleri, lise öğrencilerinin geometrik çalışmalarını nasıl etkilemektedir?

2. Yöntem

Bu bölümde araştırmanın deseni, çalışma grubu, süreçte uygulanan etkinlikler, veri toplama araçları ve verilerin analizi yer almaktadır.

2.1. Eylem Araştırması Süreci

Bu araştırmada, dinamik geometri yazılımı ile donatılmış bir ortamda çember konusunun öğretilmesinin öğrencilerin geometrik çalışmalarını nasıl etkilediği eylem araştırması yaklaşımı ile anlaşılmaya çalışılacaktır. Eylem araştırması, verilerin sistemli bir şekilde toplanması ve analiz edilmesini, öğrenme-öğretme sürecinde yaşanan problemlerin ortaya çıkarılmasını veya var olan bir problemin çözülmesini içeren, araştırmacının algı ve yorumlarını veri olarak kabul eden nitel bir araştırma yaklaşımıdır (Çepni, 2014). Eylem araştırmasının en önemli varsayımı, öğretmenlerin kendi uygulamaları hakkında en iyi bilgi sahibi olabilecekleri ve eğitim ortamını iyileştirmeye dönük en etkili önlemleri yine kendilerinin alabileceklerine dayanmaktadır. Bu bakış açısı, eylem araştırmasının teori ve pratiği birbirine yaklaştırarak aradaki boşluğu dolduran önemli bir araç olduğuna işaret etmektedir (Johnson, 2002).

Eylem araştırması, basit bir problem çözme süreci değildir. Problem ile ilgili bilgi toplanması, problemi çözecek orijinal fikirlerin ortaya konularak uygulanması ve uygulamalarına eleştirel bir bakış açısıyla yansıtılmasını içeren sistematik bir süreçtir. Tomal (2003) eylem araştırması sürecini bir hekimin bir hastayı

tedavi ederken kullandığı yaklaşıma benzetmektedir. Doktor, öncelikle hastanın şikâyetine dayalı olarak problemi belirler, bir dizi tıbbi teşhis testi yapar (veri toplama), bu testlerin sonuçlarını hastayla tartışır (analiz ve geri bildirim), tedaviye karar verir ve uygular (planlama ve eyleme geçme) ve ardından hastanın durumunu değerlendirir. Bu çalışmada da benzer aşamalar gerçekleştirildi. Bir araştırmacı olarak, yıllar içinde yaptığım gözlemler sonucu öğrencilerimin birçoğunun geometriyi öğrenirken oldukça zorlandıkları, derse karşı motive olamadıkları ve sorulan sorulara yeterli cevaplar üretemediklerini fark ettim. Bu durum öğrencilerin geometrik düşünme süreçlerini ve çalışmalarını olumsuz yönde etkileyen ciddi bir sorun olarak karşıma çıkmıştır. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için geometri derslerimde dinamik geometri yazılımları kullanmaya ve oluşan yeni öğrenme ortamlarında öğrencilerin geometri öğrenme adına bilişsel yaşantılarını analiz etmeye karar verdim. Bu amaçla etkinliklerin tasarımı, uygulanması ve verilerin analizinde başka bir araştırmacıyla iş birliği yapmaya karar verdim. Özellikle müfredatta yer alan ve öğrencilerin öğrenme gücünü yaşadığı konulardan birisi olan çember konusunun öğretimiyle ilgili etkinlikler tasarlandı. Uygulamadan önce öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri hakkında genel bir fikir edinmek amacıyla *van Hiele Testi* kullanıldı (Baki, 2020).

Dinamik geometri yazılımı ile desteklenmiş etkinliklerin etkisini daha net bir şekilde ortaya koyabilmek için yansıtıcı günlükler ve gözlemlerden yararlanıldı. Bu sayede etkinliklerin uygulanması sırasında aksayan veya yolunda gitmeyen durumlarla ilgili değerlendirmeler daha ayrıntılı yapılabilir.

2.2. Çalışma Grubu

Bu çalışmanın örneklemini, Türkiye'nin bir devlet lisesinde öğrenim gören 6 adet 11. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Öğrencilerin hepsinin cinsiyeti kızdır. Bu öğrenciler ülke genelinde yapılan merkezi sınav sonucunda orta düzeyde bir başarıya sahip olup sayısal ağırlıklı dersler almaktadırlar. Bu çalışmada katılımcıların gerçek isimleri yerine $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$, $\hat{O}_3$, $\hat{O}_4$, $\hat{O}_5$, $\hat{O}_6$ şeklinde kodlar kullanılmıştır.

2.3. Araştırmacının Rolü

Bu çalışmayı iki araştırmacı yürütmüştür. Araştırmacılar çalışmanın ilk aşamasında dinamik geometri yazılımına yönelik etkinlikleri birlikte tasarlamıştır. Etkinliklerin uygulaması olan çalışmanın ikinci aşamasında birinci yazar araştırmacı öğretmen olarak dersleri yürütmüştür. Aynı anda üstlendiği araştırmacı öğretmen rolü sayesinde öğrencilerin geometrik çalışmaları hakkında yeterli gözlem yapma imkânı bulmuştur. Öğrenme sürecine ilişkin alan notları araştırmacı öğretmen tarafından yansıtıcı günlükler eşliğinde kaydedilmiştir. Uygulama sonrası, iki araştırmacı birlikte öğrencilere sorulacak üç geometri sorusunu belirlemiştir. Daha sonra, dinamik geometri yazılımının olduğu ortamda 6 öğrenciye bu sorular sorularak klinik mülakatlar yürütülmüştür. İkinci araştırmacı klinik mülakatları video kaydına almış ve kayıtlar iki araştırmacı tarafından değerlendirilerek Kuzniak vd.'in (2016) modeline göre analiz edilmiştir.

2.4. Araştırmanın Tasarımı

Sınıf ortamında yaşanan bir problem bu eylem araştırmasının başlangıç noktasını oluşturmaktadır. Araştırmacı öğretmen doktora eğitimi sırasında almış olduğu derslerde, dinamik geometri yazılımı olan Geogebra'nın öğretim ortamında nasıl ve ne amaçla kullanılabileceği konusunda araştırmalar yapmıştır. Etkinliklerin hazırlanmasında ilk olarak ortaöğretim matematik öğretim programının genel amaçlarını, matematik 11. sınıfta öğretilen konuları inceledim. İkinci olarak, Geogebra yazılımını kullanmaya en uygun olan konuların seçimini yaptım. Son olarak, öğretim programının genel amaçlarını, ders kitabındaki konular ve kazanımları eş zamanlı olarak inceledim ve çember konusunun en uygun konu olduğuna karar verdim. Bu bağlamda Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) kaynak kitaplarında yer alan içeriklerden ve MEB açık erişim kaynaklarından uyarlayarak 8 adet etkinliği (URL-1, 2022) uzman görüşü olarak tasarladım. Etkinlikler Ek 1'de yer almaktadır. Etkinliklerin tamamı öğrencilerin Geogebra üzerinde uygulamalar yapmalarına, çember konusunu keşfederek öğrenmelerine yardımcı olmaktadır. Çember konusu ile ilgili etkinlikler yapılırken öğrenci çalışmalarının ekran görüntüsünü aldım. Uygulama kapsamında kullanılan etkinliklerin adları, hangi konu içerisinde yer aldığı ve etkinlik süresi ile ilgili bilgilere Tablo 1'de yer verilmiştir.

Tablo 1. Süreçte Uygulanan Etkinlikler

Etkinlik Adı-No	Etkinliğin Konusu	Süre (ders saati)
Örümcek Ağı-Etk 1	Merkez Açısı ve Çevre Açısı	40 dk (1 ders saati)
Tekerlek-Etk 2	Çemberde Teğet-Kiriş-Çap-Yay ve Kesen	40 dk (1 ders saati)
Tahliye Boruları-Etk 3	Teğet-Kiriş Açısı	40 dk (1 ders saati)
Kaneviçe Kasnağı-Etk 4	Çemberde İç Açısı ve Dış Açısı	40 dk (1 ders saati)
Atık Su Arıtma Projesi- Etk 5	Çemberde Kirişin Özellikleri	40 dk (1 ders saati)
Cephane Teslim Rotaları- Etk 6	Bir Çemberle Bir Doğrunun Durumları	40 dk (1 ders saati)
Gemi Rotaları-Etk 7	Teğet ve Teğet Parçası	40 dk (1 ders saati)
Bilezik Kapları-Etk 8	Teğetler Dörtgeni	40 dk (1 ders saati)



Şekil 2. Sınıf ortamında etkinliklerin uygulanmasından kesitler

Uygulama 8 ders saati sürmüştür ve toplamda 3 haftalık bir süreçte tamamlanmıştır. Süreç içerisinde gözlem yaparak öğrencilerle ilgili olarak sürekli yansıtıcı günlük tutmaya çalıştım. Eylem araştırmalarında öğretmen katılımcı gözlemler yapar. Bu araştırmada öğrencilerin etkinliklere tepkilerini doğal seyrinde izlenerek önemli görülen durumları kayıt altına aldım. Ayrıca uygulama süresince dersimin öncesinde ve sonrasında günlük tutarak öğrenciler ilgili yorumlarımı yansıtmaya çalıştım. Bu durumu gösteren örnek bir kesit aşağıda verilmiştir:

(Cephane Teslim Rotaları- Etkinlik 6)

Öğrencilerin en çok zorlandıkları etkinliklerden biri buydu. Öğrenciler bu etkinlikte yer alan doğruların ne işe yarayacağını ilk başta anlayamadılar. Bu etkinlik diğer etkinliklere göre süre olarak en uzun süren etkinlikti. Cebir penceresi deneyimini ilk yaşadıkları etkinlik buydu. Öğrenciler cebir penceresine etkinlikte yer alan denklemleri yazdıklarında oluşan şekilleri yavaş yavaş yorumlamaya başladılar. Öğrencilerin bazıları $A (+1, -7)$ noktasını denklemlerde yerine yazarak bütün doğruları sağladığını söylemiş; dolayısıyla cephaneyi üç noktaya da bırakır diye yanıt vermişlerdir. Öğrencilerden birisi iki nokta arasındaki uzaklığı cetvelle ölçülebileceğini söyledi. Daha sonra öğrenciye analitik geometri ile ilgili formülleri hatırlayıp hatırlamadığını sordum. Öğrenci bu sorudan sonra yaptığı hatanın farkına vardı. Cebir penceresinde “x” ve “y”leri büyük yazan bazı öğrenciler doğrular yerine sürgüler oluşturdular. Daha sonra deneme-yanılma yöntemiyle harfleri küçük yazarak doğruları çizebildiler.

Yukarıda verilen örnekte olduğu gibi günlüklerimde uygulama esnasında öğrencilerimin tepkilerini değerlendirmeye çalıştım. Geogebra ile ilgili hangi araçlara başvurdıkları hakkında yorumlamalar yaptım. Öğrencilerle klinik mülakatlar yürütüp onların geometrik çalışmalarındaki ilerlemeyi tespit etmeye çalıştım.

2.5. Veri Toplama Araçları

Araştırmada öğrencilerin geometrik çalışmalarını açık ve net bir biçimde ortaya koymak amacıyla klinik mülakat soruları oluşturulmuştur. Bu bağlamda ilgili literatür taraması, öğretim programı, kaynak kitaplar ve uzman görüşleri doğrultusunda öğrencilere 3 soru yöneltilmiştir. Bu sorular şu şekildedir:

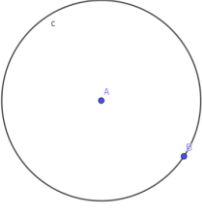
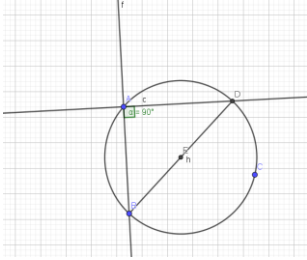
- Bir çemberin merkezini bulunuz.
- Bir çembere dışındaki bir noktadan bir teğet çiziniz.
- Bir çemberi iki eş parçaya ayırınız.

Her öğrenci ile yaklaşık 15-20 dakikalık görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler öğrencilerden izin alınarak videoya kaydedilmiştir. Görüşmeler esnasında öğrencilerin sorulara cevapları alınmış, bu cevaplarının sebepleri üzerine konuşulmuştur.

2.6. Verilerin Analizi

Araştırmadaki öğrencilerin geometrik çalışmaları, geometrik paradigmlar ve GÇU modeli baz alınarak nitel olarak analiz edilmiştir. Tablo 2’de, “Bir çemberin merkezini bulunuz.” sorusuna ilişkin iki öğrencinin cevaplarının nasıl analiz edildiği gösterilmiştir.

Tablo 2. Örnek öğrenci cevabı analizi

Öğrencinin (varsa) Geogebra Çizimi	Mülakat kesiti	Yorum
	Ö: Bu soru basit geldi biraz ama. A: Neden? Ö: Bir çemberin merkezi...Zaten çember çizdiğimizde merkezi bir çember çiziliyor. A: Merkez direkt bulunuyor diyorsun. Ö: Evet. A: Başka bir yol var mı sence? Ya da bu soruyu kâğıt-kalem ortamında nasıl yapardın? Ö: Kâğıda bir çember çizdim. O şekli kâğıttan kesip çıkartır, sonra da ikiye katlardım. Sonra tekrar diğer taraftan katlardım. Merkezini bulurdum.	Paradigma: Geometri I (Doğal geometri) Kâğıda bir çember çizme (Temsil) Oluşum: Gösterimsel Kâğıdı kesme-katlama (Çizim aracı) Oluşum: Araçsal Düzlem: Gös-Arç
	Ö: İlk önce üç noktadan geçen bir çember oluştururum. A: Neden böyle bir çizim ile başladın? Ö: Çünkü merkezini bulabilmem için bana doğru parçası lazım diye düşünüyorum. O yüzden A ile B noktasını kullanabilirim. (...noktaları doğru parçası ile birleştirdi). Burada şeyi düşünüyorum aslında. Çevre açısı 90 derece olduğunda gördüğümüz doğru çaptı. Çaptan yola çıkarak merkezi bulabilirim. A: Nasıl? Ö: A ile B'ye bir dik oluşturduğumda buradaki açı 90 derece olacak. Kesiştirelim noktayı diyerek noktaları kesiştiriyor. (...Sonra açığı ölçüyor). BAD açısı tam 90 derece geldi. Şimdi 90 derecenin göreceği bir doğru bize çapı verecek. (...B ile D noktasını birleştiriyor). Çapımızı oluşturduk. Çünkü 90 derecenin gördüğü doğru parçası bizim çapımıza eşitti. 90 derece olmasaydı BD giriş olacaktı.	Paradigma: Geometri II (Doğal Aksiyomatik Geometri) Üç noktadan geçen bir çemberi çizme (Görselleştirme) Oluşum: Gösterimsel Çemberde A ve B doğruları arasındaki açının 90 derece olmasını sağlama (çapı gören çevre açısı 90 derece teoremi) (Nesnenin anlamı) Oluşum: Söylemsel Düzlem: Gös-Syl

Tablo 2 incelendiğinde, öğrencilerin sorulara ilişkin mülakat esnasında verdikleri cevaplar, ilişkili oldukları paradigma, GÇU çerçevesinde yansıttıkları bileşenler, hangi oluşumların aktif olarak kullanıldığı ve cevapların karşılık geldiği düzlemler açısından yorumlanmıştır. Tüm öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar bu yaklaşımla analiz edilmiştir. Ayrıca genel bir çetele tablosu üzerinden özetlenmiştir. Böylece öğrencilerin her bir sorudaki cevapları değerlendirilerek geometrik çalışmaları tanımlanmıştır.

2.7. Araştırma Etiği

Bu araştırmanın etik kurallara uygun bir şekilde yapıldığı, Trabzon Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etik Kurulu tarafından onaylanmıştır (sayı: E-81614018-050.04-2500003318). Araştırmanın yürütüldüğü lise öğrencilerine öncelikle araştırma hakkında yeterli bilgi verilmiş ve cevaplarının sadece bilimsel amaçlı kullanılacağı, kişisel bilgilerin farklı kişiler ya da kurumlarla paylaşılmayacağı belirtilmiştir. Öğrencilerin onayı alındıktan sonra uygulamaya geçilmiştir.

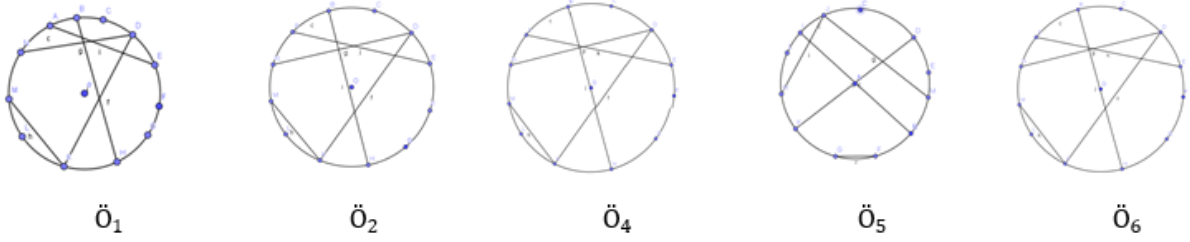
3. Bulgular

Araştırmadan elde edilen bulgular; uygulama süreci ve uygulama sonrası olmak üzere iki başlık altında incelenmiştir. İlk bölüm olan uygulama sürecinde dinamik geometri yazılımlarının kullanıldığı öğrenme ortamındaki çalışmalar özetlenmiştir. İkinci bölüm olan uygulama sonrasında ise öğrencilerin uygulama sürecinin sonunda yer alan klinik mülakat sorularına verdikleri cevaplar sunulmuştur.

3.1. Uygulama Süreci

Çember konusunun öğretimine ilk olarak, merkez açısı ve çevre açısı kavramlarını temel alan dersimle başladım. Bu derste öğrencilerin daha önce tasarladığım *Örümcek Ağı* etkinliği (bkz. Ek 1) üzerinde çalışmalarını sağladım. 1 ders saati (40 dk) süren bu etkinlik, öğrencilerin örümceklerin takip ettikleri yolları Geogebra'da oluşturdukları çember üzerinde çizimleri ve kesişen yolların merkez veya çevre açısı olma durumlarına karar vermelerini

gerektirmektedir. Öğrenciler Geogebra'yı kullanarak etkinlik üzerinde çalıştılar. Şekil 3'te, öğrencilerin çizimlerinden kesitler verilmiştir.

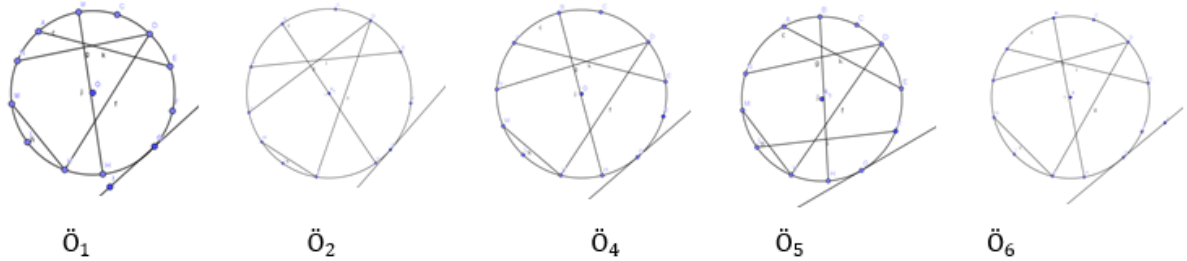


Şekil 3. Öğrencilerin “Örümcek Ağı” etkinliği için yaptıkları çizimler

Öğrenciler genel olarak etkinlikte verilen çembere oluşturarak örümceğin takip ettiği yolları çember üzerindeki noktaları birleştiren kırışları kullanarak çizmiştir. Ancak, bazı öğrenciler, noktaları farklı isimlendirmesinden kaynaklı çizimleri yapmada zorlanmıştır. Öğrenciler merkez ve çevre açıları belirlerken çemberin içinde çalıştıklarını fark etmişlerdir. Ders esnasındaki bu gözlemime ilişkin aldığım not şöyledir:

“Çalışmaya Ö₃ dışında toplam beş öğrenci katıldı. Bu etkinlik öğrencilerin ilk Geogebra etkinliği idi. Öğrencilerin hepsi Geogebra’da çembere, noktaları yani etkinlikte istenilen şekli oluşturabildi. Araştırmacı öğrencilere merkez açı ve çevre açıları nasıl oluşturacaklarını sordu. Öğrenciler kırışlarla oluşturacaklarını belirttiler. Öğrenciler merkez açının ve çevre açının çemberin iç bölgesinde kaldığını anlamışlardı. Şekilde yer alan noktalarla kendi oluşturdukları noktaların farklı olduğundan bu nedenle kafalarının karıştığından bahseden öğrenciler oldu”

Öğrencilerin merkez açı ve çevre açıya ilişkin öğrenmelerini destekledikten sonra çemberde teğet, kırış, çap, yay ve kesen kavramlarını hedef alan Tekerlek (bkz. Ek 1) etkinliği üzerinde çalışmalarını sağladım. 1 ders saati süren bu etkinlikte öğrencilerin Geogebra'yı kullanarak verilen tekerleği oluşturmaları ve buna ilişkin bazı soruları cevaplamaları istenmektedir. Bu sorular, çember üzerindeki farklı noktalar arasındaki ilişkileri yansıtmakta ve öğrencilerin bunları teğet, kırış, çap, yay ve kesen kavramları ile eşleştirerek açıklamalarını gerektirmektedir. Öğrenciler ilişkilere dair çember üzerinde çizimler yapmıştır. Şekil 4'te öğrencilerin Geogebra'daki çizimlerinden kesitler verilmiştir.



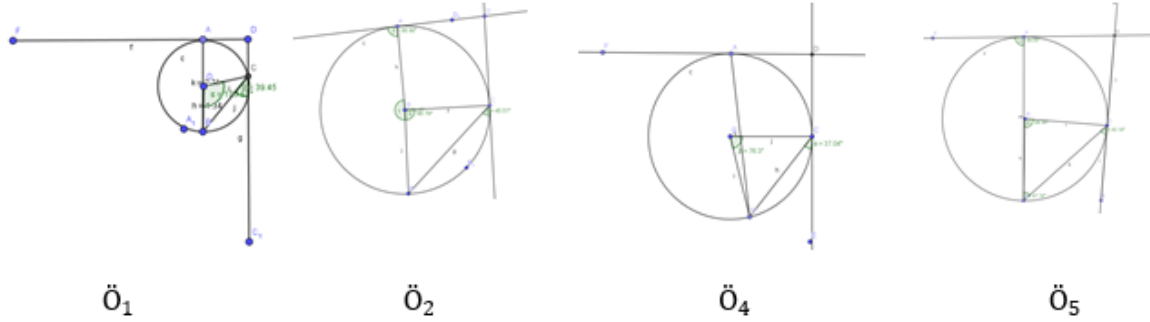
Şekil 4. Öğrencilerin “Tekerlek” etkinliği için yaptıkları çizimler

Öğrenciler bu etkinlikte birlikte Geogebra'yı kullanmada daha özgüvenli olmaya başlamıştır. Nitekim çembere kolayca çizip, noktaları etkinlikte verildiği şekilde isimlendirmişlerdir. Genel olarak çizimlerini teğet, kırış, çap ve yay kavramları ile sorunsuz bir şekilde açıklamışlardır. Ancak, Şekil 4'te görüldüğü gibi öğrencilerin kesen kavramıyla ilgili bazı zorluklara sahip oldukları açıktır. Nitekim öğrenciler kesen'i bir doğru ile göstermek yerine, doğru parçası (kırış) ile göstermeye çalışmışlardır. Bu sebeptendir ki, bazı öğrenciler kesen'in hangisi olduğunu ayırt edememiştir. Ders esnasındaki bu gözlemime ilişkin aldığım not ise şöyledir:

“Çalışmaya Ö₃ dışında toplam beş öğrenci katıldı. Öğrenciler bu etkinlikte bir önceki etkinliğe göre Geogebra kullanmaya daha çok alışmış gözüküyorlardı. Çizim yaparken noktaları doğru şekilde isimlendirebildiler. Öğrenciler bu etkinlikte yer alan teğet, kırış, yay, çap, yay, kesen kavramlarını etkinliğe uygun şekilde işaretlemeye çalıştılar. Üç öğrenci kesen kavramını tabloda doğru bir şekilde işaretleyemedi. Diğer iki öğrenci ise tablodaki tüm değerleri doğru bir şekilde doldurdu. “Kesen” kavramıyla ilgili bazı öğrencilerin zihni karışmış gözüküyordu”

Öğrencilerin çember konusu ile ilgili temel kavramları keşfederek öğrenmelerine destek olduktan sonra, bu kavramların üzerine inşa edebilecekleri önemli bir diğer kavram olan teğet-kırış açısına odaklandım. Öğrencilerin

teğet-kiriş açısı anlamları için *Tahliye Boruları* (bkz. Ek 1) etkinliği üzerinde çalışmalarını sağladım. 1 ders saati (40 dk) süren bu etkinlikte, öğrencilerin dik kesişen iki yolun içine inşa edilecek havuz için tahliye borularını teğet-kiriş açıları elde edecek şekilde çizimleri istenmektedir. Bununla birlikte, teğet-kiriş açısı ile gördüğü yayın ölçüsü arasında ilişki kurmaları da hedeflenmektedir. Öğrenciler etkinlikte verilen yapıyı Geogebra’da oluşturmuştur. Şekil 5’te öğrencilerin Geogebra’daki çizimlerinden kesitler verilmiştir.

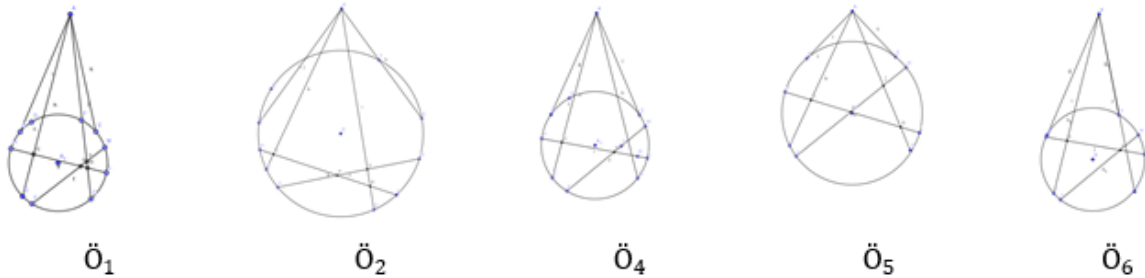


Şekil 5. Öğrencilerin “Tahliye Boruları” etkinliği için yaptıkları çizimler

Öğrenciler oluşturdukları çizimler üzerinde teğet-kiriş açıların neler olduğu, bu açıların merkez açısı ile gördükleri yayların ölçüleri arasındaki ilişkileri doğru bir şekilde kavramsallaştırmışlardır. Ders esnasındaki bu gözlemime ilişkin aldığım not şöyledir:

“Çalışmaya Ö₃ ve Ö₆ dışında toplam dört öğrenci katıldı. Bu etkinlikte öğrenciler açıları ölçerek teğet-kiriş açısının ölçüsünün gördüğü yayın ölçüsüne yarısına eşit olduğunu daha iyi anladıklarını belirttiler. Ayrıca merkezden geçen en uzun kirişin çap olduğu bilgisini şekil üzerinde oluşturdukları kirişi merkeze yaklaştırıp uzaklaştırarak kiriş boyları hakkında yorumlar yaptılar”

Öğrencilerin çemberde iç açı ve dış açı kavramlarını öğrenmeleri amacıyla *Kanaviçe Kasnağı* (bkz. Ek 1) etkinliği üzerinde çalışmalarını sağladım. 1 ders saati içinde, verilen kasnak modelini Geogebra’yı kullanarak oluşturmaları ve kasnak üzerindeki iplerin kesiştikleri noktalarda oluşan iç ve dış açıları belirlemelerini istedim. Şekil 6’da öğrencilerin kasnak modeline ilişkin Geogebra’daki çizimlerinden kesitler verilmiştir.



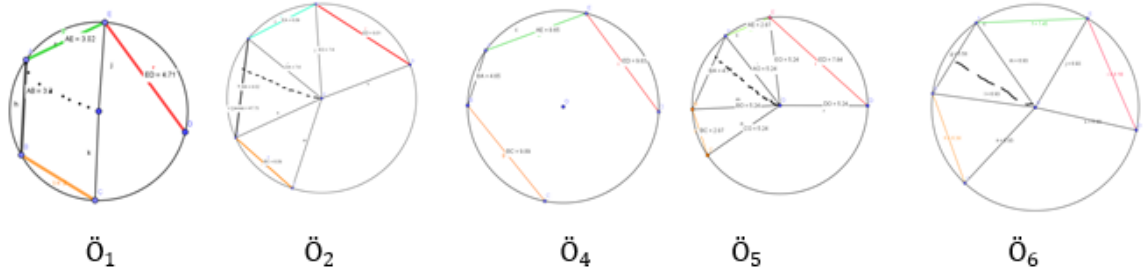
Şekil 6. Öğrencilerin “Kanaviçe Kasnağı” etkinliği için yaptıkları çizimler

Bu etkinlikte öğrenciler kasnak modelini Geogebra’da çizme konusunda problem yaşamamış olsalar da çizim üzerindeki iç ve dış açıların tümünü belirlemede bazı zorluklarının olduğu görülmüştür. Ders esnasındaki bu gözlemime ilişkin aldığım not şöyledir:

“Çalışmaya Ö₃ dışında toplam beş öğrenci katıldı. Öğrenciler önceki iki etkinliğe göre şekilleri Geogebra’da daha hızlı çizebiliyorlardı. Öğrencilerden yalnızca biri tüm iç ve dış açıları cevaplar bölümüne eksiksiz bir şekilde yazabildi”

Başka bir dersimde bu kez odağımız, çemberde kirişin özelliklerini (kirişin orta dikmesinin çemberin merkezinden geçtiği, bir kirişin orta noktasını çemberin merkezine birleştiren doğrunun kirişe dik olduğu, kirişlerin uzunlukları ile merkeze olan uzaklıkları arasındaki ilişki gibi) fark etme üzerineydi. Bu amaçla öğrencilerin 1 ders saati (40 dk) boyunca *Atık Su Arıtma Projesi* (bkz. Ek 1) etkinliği üzerinde çalışmalarını sağladım. Etkinlikte, çember şeklindeki bir bölgenin farklı noktalarında yer alan mahalleler arasına kanalizasyon boruları döşenmiştir. Bu kanalizasyon borularına merkezden atık su taşıma hattı döşenecek olup bu hattın en kısa olması istenmektedir. Öğrencilerinden öncelikle çembersel bölgeyi ve mahalleler arasındaki kanalizasyon

borularını Geogebra yardımıyla oluşturmalarını istedim. Şekil 7’de öğrencilerin Geogebra’daki çizimlerinden kesitler verilmiştir.

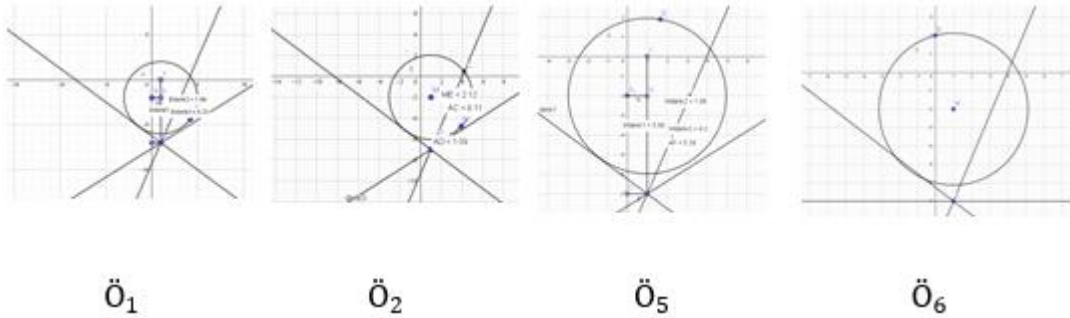


Şekil 7. Öğrencilerin “Atık Su Arıtma Projesi” etkinliği için yaptıkları çizimler

Öğrenciler genel olarak bu etkinlikle birlikte en kısa atık su taşıma hattının merkezden kanalizasyon borularına dik indirilen doğru olduğunu ve bu doğrunun uzunluğunun kırışlerin uzunluğuna bağlı olarak değiştiğini (örneğin; uzun kırışler için daha kısa) keşfetmişlerdir. Böylece hangi iki mahalle arasındaki hattın daha kısa veya daha uzun olacağını belirleyebilmişlerdir. Etkinlikte hedeflenen özellikleri keşfetmişlerdir. Ders esnasındaki bu gözlemime ilişkin aldığım not şöyledir:

“Çalışmaya beş öğrenci katıldı. Soruyu ilk okuduklarında öğrencilerde kafa karışıklığı oldu. Bunun nedeninin ise etkinlikte yer alan boruların (kırışlerin) uzunluklarıydı. Dört öğrenci ilk soru olan “tesisten borulara çekilecek hatlardan maliyeti en az olanın hangi iki mahalle arasına çekilen boru hattı olduğunu bulunuz” sorusuna doğru yanıt verdi. Bir öğrenci ise mahalle sayısı ile borunun uzunluğunun orantılı olacağını düşündüğünü belirtti. Etkinliğin sonlarına doğru şekilleri tam olarak oluşturup soruları istenilen şekilde yanıtladılar. Öğrencilerden birbirleriyle iletişimlerini sonucu Geogebra’da renk değiştirme seçeneğini keşfederek etkinliği renkli olarak çizebildiler”

Bir çemberle bir doğrunun birbirine göre durumlarını araştırmak için öğrencilerin *Cephane Teslim Rotaları* (bkz. Ek 1) etkinliği üzerinde çalışmalarını sağladım. Bu etkinlikte belli bir koordinatta yer alan askeri helikopterin, çembersel bir bölge üzerindeki farklı noktalara cephane bırakması istenmektedir. Bunun için helikopterin izleyeceği üç doğrusal denkleme sahip rotalar yer almaktadır. Öğrencilerden 1 ders saati içinde bu çembersel bölgeyi ve doğruları Geogebra’yı kullanarak çizmeleri, çember ve doğrular aralarındaki ilişkileri matematiksel olarak belirlemelerini istedim. Şekil 8’de öğrencilerin Geogebra’daki çizimlerinden kesitler verilmiştir.



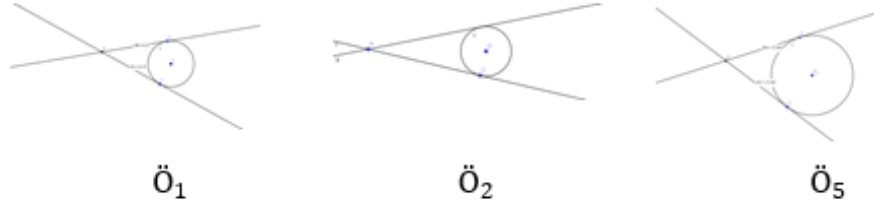
Şekil 8. Öğrencilerin “Cephane Teslim Rotaları” etkinliği için yaptıkları çizimler

Bu etkinlik, özellikle öğrencilerin cebir penceresini kullanmaları açısından önemli olmuştur. Öğrenciler doğruları oluşturma, noktalar arasındaki uzaklıkları bulma gibi konularda birtakım zorluklar yaşamıştır. Doğruların çemberi kaç noktada kestiği, doğruların çemberin merkezine olan en kısa uzaklığını hesaplamada çeşitli düşünce tarzlarının olduğunu gözlemledim. Ders esnasındaki bu gözlemime ilişkin aldığım not şöyledir:

“Çalışmaya dört öğrenci katıldı. Öğrencilerin en çok zorlandıkları etkinliklerden biri buydu. Öğrenciler bu etkinlikte yer alan doğruların ne işe yarayacağını ilk başta anlayamadılar. Bu etkinlik diğer etkinliklere göre süre olarak en uzun süren etkinlikti. Cebir penceresi deneyimini ilk yaşadıkları etkinlik buydu. Öğrenciler cebir penceresine etkinlikte yer alan denklemleri yazdıklarında oluşan şekilleri yavaş yavaş yorumlamaya başladılar. Öğrencilerin bazıları $A(+1, -7)$ noktasını denklemlerde yerine yazarak bütün doğruları sağladığını söylemiş dolayısıyla cephaneyi üç noktaya da bırakır diye yanıt vermişlerdir. Öğrencilerden birisi iki nokta arasındaki uzaklığı cetvelle ölçebileceğini söyledi.

Daha sonra öğrenciye analitik geometri ile ilgili formülleri hatırlayıp hatırlamadığını sordum. Öğrenci yaptığı yanlışın farkına vardı. Cebir penceresinde “x” ve “y”leri büyük yazan bazı öğrenciler doğrular yerine sürgüler oluşturdular. Daha sonra deneme-yanılma yöntemiyle harfleri küçük yazarak doğruları çizebildiler”

Öğrencilerin çemberin dışındaki bir noktadan çembere teğetler çizmelerine ve çembere çizilen teğet parçalarının uzunluklarının birbirine eşit olduğunu keşfetmelerine yardımcı olmak için *Gemi Rotaları* (bkz. Ek 1) etkinliği üzerinde çalışmalarını sağladım. 1 ders saati (40 dk) süren bu etkinlikte, okyanus üzerinde tehlikeli olan çembersel bir bölge ve bu bölgenin içine girmeden yol alan iki geminin izlediği rotalar verilmiştir. Öğrenciler etkinlikte verilen bu yapıyı Geogebra’da oluşturarak teğet, teğet parçası ve bunların özelliklerini anlamaya çalışmıştır. Şekil 9’da öğrencilerin Geogebra’daki çizimlerinden kesitler verilmiştir.

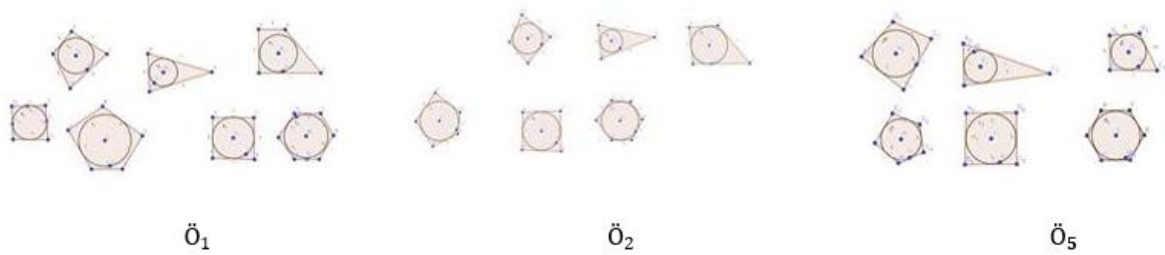


Şekil 9. Öğrencilerin “Gemi Rotaları” etkinliği için yaptıkları çizimler

Öğrenciler Geogebra’nın farklı özelliklerinden yararlanarak verilen yapıyı oluşturmuş ve soruları cevaplamışlardır. Bu anlamda, çembere bir noktadan iki teğet çizilebileceği ve çizilen teğet parçalarının uzunluklarının birbirine eşit olduğunu anlamışlardır. Ders esnasındaki bu gözlemime ilişkin aldığım not şöyledir:

“Etkinliğe üç öğrenci katıldı. Bu etkinlikte Ö2 çemberi oluşturduktan sonra önce teğet ikonuna sonra çember üzerinde bir noktaya tıklayarak istenilen şekli hızlı bir şekilde çizdi. Ö1 ve Ö5 ise çember üzerinde iki nokta belirlediler. Teğet ikonuna tıkladılar. Ayı ayrı iki teğet çizip tek noktada kesiştirdiler. Teğet parçalarını uzunluk ikonunu kullanarak ölçen öğrenciler oldu. Bu öğrenciler aynı zamanda araştırmacının sorusu üzerine teğet kavramını da doğru bir şekilde açıklayabildiler”

Son olarak, öğrencilerin teğetler dörtgenini öğrenmelerini desteklemek için *Bilezik Kapları* (bkz. Ek 1) etkinliği üzerinde çalışmalarını sağladım. Bu etkinlikte içinde çember olan farklı çokgensel modellerdeki bilezik kaplarından en popüler üç tanesinin özellikleri incelenmekte ve teğetler dörtgeni kavramına ulaşılmaktadır. 1 ders saati içinde öğrencilerin ilk olarak bu çokgensel modelleri Geogebra’yı kullanarak çizmesi ve daha sonra teğetler dörtgenini anlamalarına yardımcı oldum. Şekil 10’da öğrencilerin Geogebra’daki çizimlerinden kesitler verilmiştir.



Şekil 10. Öğrencilerin “Bilezik Kapları” etkinliği için yaptıkları çizimler

Öğrenciler Geogebra’nın farklı özelliklerinden yararlanarak verilen çokgenleri oluşturmuş ve teğetler dörtgeni kavramını anlamışlardır. Ders esnasındaki bu gözlemime ilişkin aldığım not şöyledir:

“Etkinliğe üç öğrenci katıldı. Bu etkinlik çalışmamızın son etkinliği idi. Öğrencilerin bazıları bu etkinlikte yer alan çokgenleri, çokgen ikonundan oluştururken diğerleri ise düzgün çokgen ikonundan oluşturdular. Öğrenciler etkinlik sorularını doğru bir şekilde yanıtladılar”

3.2. Uygulama Sonrası

3.2.1. Bir Çemberin Merkezini Bulma ile ilgili Soruya ilişkin Bulgular

Bu soruyu çözerken öğrenciler üç farklı problem çözme yaklaşımı kullanmıştır. Öğrencilerin yarısı somut materyaller yardımıyla çözüm geliştirirken ($\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_5$), 2 tanesi geometrik şekli öncül teoremlerle destekleyerek yorum yapmıştır ($\ddot{O}_3$, $\ddot{O}_4$). 1 öğrenci ise, her iki yaklaşımı da kullanarak cevap vermiştir ($\ddot{O}_6$). Örneğin; $\ddot{O}_5$ bu soruya mülakat sırasında şöyle bir açıklama yapmıştır:

$\ddot{O}_5$: Bir çember çizelim (Ekranı bir merkez ve nokta ile çember ikonundan bir çember çizdi). Eee...merkezi var. Merkezle çizdik bunu.

A: Peki ben şimdi sana bunu kâğıt-kalem ortamında yap deseydim. Merkezi nasıl bulurdun?

(Öğrenci düşünüyor)

$\ddot{O}_5$: İlk önce bir çember çizerim. Sonra çemberi keserek kâğıttan çıkarırım. Katlarım, iki eş parçaya ayrılır. Ve merkezi belli oluyor katlayınca.

A: Bir kez mi katlarız? Kaç kere katlamamız lazım?

$\ddot{O}_5$: Bir kez katlayınca eşit iki parçaya ayrılıyor.

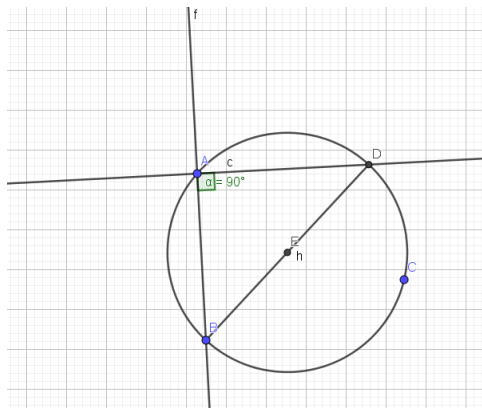
Öğrenci ilk önce Geogebra programının özelliklerinden yararlanarak çemberin merkezini kolayca bulabileceğini belirtmiştir. Daha sonra kâğıt üzerinde çemberin bir şablonunu çıkarıp (görselleştirme) katlama yaparak (çizim aracı) çemberin merkezini bulabileceğini belirtmiştir. Benzer şekilde $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ de bu yönde açıklamalar yapmıştır. Bu öğrenciler de ilk olarak Geogebra yardımıyla çemberin kolayca çizilebileceğini vurgulamıştır. Daha sonra ise kâğıt gibi somut materyaller kullanarak çözüme ulaşabileceklerini bildirmiştir:

$\ddot{O}_1$: Kâğıda bir çember çizerdim. O şekli kâğıttan kesip çıkartır, sonra da ikiye katlardım. Sonra tekrar diğer taraftan katlardım. Merkezini bulurdum.

$\ddot{O}_2$: Kâğıda çemberi çizerdim. İki kenarı üst üste gelecek şekilde katlardım. Tam ortadan çizilmiş, katlanmış olurdu. Çap olurdu. Tekrar diğer taraftan o şekilde katlardım yine. O katladığımda çıkan çizgiye dik olacak şekilde. O zaman tam ortası olurdu yine. Merkezimiz olurdu.

Bu öğrenciler kâğıt üzerine çember şeklini çizerken şekillerin geometrik çalışmada görsel destekler olduğu düşüncesinden yola çıkmışlardır. Bu bağlamda gösterimsel oluşum aktif hale gelmiştir. Diğer taraftan katlama yöntemi gibi bir çizim aracını tercih ederek çemberin merkezini geometrik olarak belirlemeye çalışmışlardır. Bu geçiş sürecinde araçsal oluşum önemli bir rol oynamıştır. Dolayısıyla öğrenciler Gös-Arç düzlemine karşılık gelen yorumlamalar yapmışlardır. Öğrenciler gerçek çizim araçlarına dayalı olarak katlama-kesme gibi teknikleri ön plana çıkarmışlardır. Bu ise onların Geometri I (Doğal geometri) paradigmasında çalıştıklarını göstermektedir.

Farklı olarak, $\ddot{O}_4$ Geogebra'yı kullanarak çember şeklini çizmiş ve teoremler yardımıyla problemi çözmeye çalışmıştır. $\ddot{O}_4$ 'ün Geogebra üzerindeki geometrik çalışmasına ilişkin açıklaması şöyledir:



$\ddot{O}_4$: İlk önce üç noktadan geçen bir çember oluştururum.

A: Neden böyle bir çizim ile başladın?

$\ddot{O}_4$: Çünkü merkezini bulabilmem için bana doğru parçası lazım diye düşünüyorum. O yüzden A ile B noktasını kullanabilirim (noktaları doğru parçası ile birleştirdi). Çevre açısı 90 derece olduğunda gördüğü doğru çaptı. Çaptan yola çıkarak merkezi bulabilirim.

A: Nasıl?

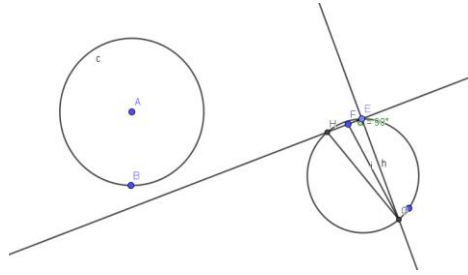
$\ddot{O}_4$: A ile B'ye bir dik oluşturduğumda buradaki açı 90 derece olacak. Kesiştirelim noktayı diyerek noktaları kesiştiriyor. (...Sonra açiyı ölçüyor). BAD açısı tam 90 derece geldi. Şimdi 90 derecenin göreceği bir doğru bize çapı verecek. (...B ile D noktasını birleştiriyor). Çapımızı oluşturduk. Çünkü 90 derecenin gördüğü doğru parçası bizim çapımıza eşitti. 90 derece olmasaydı BD kırıp olacaktı.

A: Çemberin merkezini bulabildik mi? Sanırım bulamadık henüz.

$\ddot{O}_4$: Şimdi çapımızı bulduk. Çapımızdan da orta nokta ve merkez bulma diyor. O ikondan ortasını bulduk. (...B ve D noktalarının ortasını buluyor). Çemberimizin merkezini oluşturduk.

Şekil 11. $\ddot{O}_4$ 'ün Geogebra üzerindeki çalışması

Ö₄, Geogebra'yı kullanarak gelişigüzel bir çember çizmiştir (*görselleştirme*). Daha sonra çemberin merkezini bulmak için çapı çizmesi gerektiğini fark etmiştir. Bunun için “çapı gören çevre açının 90 derece olduğu” teoreminden (*nesnenin anlamı*) yola çıkarak birbirine dik ve çemberi iki farklı noktada (B ve D noktaları) kesen doğruları bulmaya çalışmıştır. Bu iki noktanın birleştirilmesi sonucu çapın oluştuğunu ve çapın orta noktasının merkezi verdiğini belirtmiştir. Benzer şekilde Ö₃ da bu yönde bir çizim yapmış ve Ö₄ ile benzer açıklamalarda bulunmuştur. Bu öğrenciler zihinlerindeki çember şeklini çizerken *gösterimsel oluşum* aktif hale gelmiştir. Bununla birlikte, çizimlerini öncül bazı teoremler (burada çapı gören çevre açısı 90 derecedir) kullanarak desteklerken de söylemsel oluşum ön plana çıkmıştır. Dolayısıyla Gös-Syl düzleminde bir açıklama yapmışlardır. Burada geometrik nesneler (örn. çember şekli), Öklid geometrisindeki idealize nesneler ve aksiyomatik yapıya dayandığından öğrencilerin Geometri II (Doğal aksiyomatik geometri) paradigmasında bir çözüm geliştirdikleri söylenebilir. Ö₆ ise diğer öğrencilerden daha farklı bir yorum getirmiştir:



Şekil 12. Ö₆'nın Geogebra üzerindeki çalışması

Ö₆: Dışardan doksan derece...Bulabilir miyim?

A: Bilemem, bulabilir misin? Dene bakalım.

Ö₆: 90 dereceyi oluşturduktan sonra çapı göreceğim. Doksan derecelik bir açı elde edersek çapı buluruz diye umuyorum.

Öğrenci bir çember üzerinde dik kesişen iki doğru çizdi. İlk önce E ile C noktasını birleştirdi. Sonra çapı bulamadığını fark etti. Sonra araştırmacının önerisi üzerine H ile C noktasını birleştirdi. Öğrenci çizdiği kesişimlere bakarak...

Ö₆: O zaman hepsi mi oluyor? (...Bir süre düşünüyor).

A: Hepsi mi oluyor? Hepsi merkezi mi veriyor? Hepsi çap mı oluyor sençe?

Ö₆: Olmadı çapı bulamadım.

A: Kâğıt ortamında nasıl yapardın? Ben sana merkezi olmayan bir çember çizsem, merkezini bul desem?

Ö₆: Çemberi üst üste hem dikey hem yatay katlardım. O iki çizginin kesiştiği nokta çemberin merkezi oluyor.

Ö₆'nın açıklamasının çıkış noktası da aslında Ö₄ ve Ö₃ gibidir. Benzer şekilde öğrenci “çapı gören çevre açısı 90 derecedir” teoremini düşünmüş ve birbirine dik iki doğru oluşturmaya çalışmıştır. Ancak, istediği dik doğruları bulamayınca kâğıt üzerinde katlama etkinliğine yönelmiştir. Bu ise öğrencinin Gös-Syl düzleminde Gös-Arç düzlemine geçiş yaptığı anlamına gelmektedir.

Genel olarak, öğrencilerin sorular karşısındaki geometrik çalışmaları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

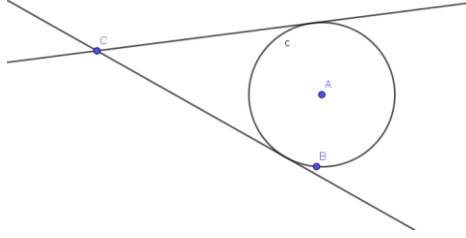
Tablo 3. Soru 1 için Öğrencilerin Geometrik Çalışmalarına ilişkin Çetele Tablosu

Öğrenci	Cevap Süresi	Paradigma			Oluşum			Düzlem		
		Geo I	Geo II	Geo III	Gös	Arç	Syl	Gös-Arç	Gös-Syl	Arç-Syl
Ö ₁	0' 41''	X			X	X		X		
Ö ₂	1' 37''	X			X	X		X		
Ö ₃	4' 23''		X		X		X		X	
Ö ₄	4' 19''		X		X		X		X	
Ö ₅	1' 21''	X			X	X		X		
Ö ₆	5' 47''	X	X		X	X	X	X	X	

Tablo 3 incelendiğinde, öğrencilerin en fazla Geometri I paradigmasına karşılık gelen cevaplar verdikleri görülmüştür. Sorularda Geometri III paradigmasına yönelik cevaba rastlanılmamıştır. Tüm öğrenciler *gösterimsel oluşum* aktif olarak kullanmışlardır. Bununla birlikte, *araçsal ve söylemsel oluşumları* kullanan öğrenciler de olmuştur. Son olarak, öğrencilerin cevapları Gös-Arç ve Gös-Syl düzlemlerinde dağılım göstermiştir. Arç-Syl düzleminde cevaplar geliştiren öğrenciye rastlanılmamıştır. Öğrencilerden bir tanesi (Ö₆) ise önce Geometri II paradigmasında cevap sunmuş, daha sonra Geometri I paradigmasına karşılık gelen cevap vermiştir (Gös-Syl → Gös-Arç).

3.2.2. Bir Çembere Dışındaki Bir Noktadan Teğet Çizme ile ilgili Soruya ilişkin Bulgular

Bu soruyu çözerken öğrenciler iki farklı problem çözme yaklaşımı kullanmıştır. Öğrencilerin 5 tanesi çizim araçları yardımıyla çözüm geliştirirken ($\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$, $\ddot{O}_5$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_6$), sadece 1 tanesi geometrik şekli öncül teoremlerle destekleyerek yorum yapmıştır ($\ddot{O}_4$). Örneğin; $\ddot{O}_1$ bu soruya aşağıdaki gibi bir açıklama getirmiştir:



Şekil 13. $\ddot{O}_1$ 'in Geogebra üzerindeki çalışması

$\ddot{O}_1$: Teğet çizeceğiz. Ama dışarda bir noktadan diyor. O zaman dışarıda bir nokta olması lazım. O zaman noktaya gidelim. Şuraya bir nokta koysak... (Çemberin dış bölgesinde bir nokta belirledi). Şimdi bunlardan teğet çizeceğiz. Ya teğet ikonu da olabilir ama doğru parçasından da olabilir.

A: Peki ikon kullanmadan nasıl çizersin?

$\ddot{O}_1$: Şuradan bir çember çizersek, şuraya bir nokta koysak ... (diyerek bir çember çizdi ve çemberin dış bölgesinde bir nokta aldı). Doğru çizsek mesela.

A: Peki ilk şekli hareket ettirebilir misin? Acaba bozulup bozulmadığına bakar mısın?

Öğrenci ilk başta iki şekilde de teğetliğin bozulmadığını düşünse de şekilleri hareket ettirdikçe bozulma olduğunu farkına vardı.

A: İki şeklin arasındaki fark ne sence? Ne yapsaydın ikinci şekilde bozulmazdı?

$\ddot{O}_1$: Ne yapsaydım?... (düşünüyor) Bilmem. Bilmiyorum galiba. Yani teğet ikonundan yapardım yine.

Öğrenci Geogebra'nın özelliklerini kullanarak bir çembere dışındaki bir noktadan teğet çizme sekmesi ile çözüme ulaşacağını bildirmektedir. Bu sekme olmadan soruyu nasıl çözebileceği sorulduğunda ise, ilk olarak gelişigüzel bir çember çizmiştir (*görselleştirme*). Daha sonra Geogebra yazılımını kullanarak (*çizim aracı*) çembere farklı iki noktada teğet olan doğrular oluşturmaya çalışmıştır. Bu haliyle teğetlik koşulunu sağlayan bir yapı inşa etmeye çalışmıştır (*inşa*). Ancak, oluşturduğu yapıyı hareket ettirdiğinde teğetliğin sağlanmadığını görmüştür. Bu açıdan öğrenci sadece görselliğe odaklanarak, istenenleri yapmaya çalışmıştır. Benzer şekilde, $\ddot{O}_2$, $\ddot{O}_5$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_6$ da aynı yorumda bulunmuşlardır. Örnek olarak, bu öğrencilerden $\ddot{O}_3$ 'ün açıklaması aşağıda verilmiştir:

$\ddot{O}_3$: Bir tane yine merkez ve çember ikonuna tıklayarak yine bir çember çizelim.

(Doğru ikonunu seçerek bir noktadan çembere teğet olduğunu düşündüğü bir şekil çizdi.)

A: Teğet ikonunu kullanmadan şekli çizebilir misin?

$\ddot{O}_3$: Çember ile üzerindeki noktayı kesiştirirsek bakalım oynama olacak mı? Ben de şu an ilk defa deneyeceğim.

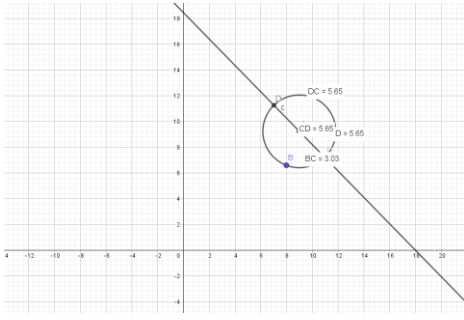
(...Kesiştirme işlemi yaptıktan sonra şekli hareket ettirdi). Yine değişiyor. Olmuyor yani.

A: Sence (ikonsuz teğet çizmenin) başka bir yolu yok mudur sence? Sana kağıt-kalem görevi verseydim bir çembere dışındaki bir noktadan nasıl teğet çizerdin?

$\ddot{O}_3$: Bir fikrim yok.

Bu öğrenciler çember şeklini çizerken şekillerin geometrik çalışmada görsel destekler olduğu düşüncesinden yola çıkmışlardır. Bu bağlamda *gösterimsel oluşum* aktif hale gelmiştir. Diğer taraftan Geogebra yazılımını kullanarak, yani bir *çizim aracını* tercih ederek çemberin dışından çembere teğet olduğunu düşündükleri bir yapı inşa etmeye çalışmışlardır. Bu geçiş sürecinde *araçsal oluşum* önemli bir rol oynamıştır. Dolayısıyla öğrenciler Göç-Arç düzlemine karşılık gelen yorumlamalar yapmışlardır. Öğrenciler herhangi bir teorik temele dayanmadan sadece görünüşü itibarı ile istenen durumu oluşturmaya çalışmışlardır. Bu ise onların Geometri I (Doğal geometri) paradigmasında çalıştıklarını göstermektedir.

Farklı olarak, $\ddot{O}_4$ Geogebra'yı kullanarak çember şeklini çizmiş ve teoremler yardımıyla problemi çözmeye çalışmıştır. $\ddot{O}_4$ 'ün Geogebra üzerindeki geometrik çalışmasına ilişkin açıklaması şöyledir:



Şekil 15. $\ddot{O}_3$ 'ün Geogebra üzerindeki çalışması

(Öğrenci çemberi çizip daha sonra çemberin merkezinden geçen bir doğru çizdi).

A: Peki bu çizdiğin doğru çemberi iki eş parçaya ayırdı mı sence?

$\ddot{O}_3$: Ayırdı.

A: Şu an çemberin üzerinden mi geçirdin doğruyu sence?

$\ddot{O}_3$: Merkezden geçirdim.

A: Peki merkezden geçirdiğin her doğru çemberi iki eş parçaya böler mi? Başka bir doğru daha çizelim (Öğrenci merkezden geçen doğruları çiziyor).

A: Bunu yaptığın zaman iki eş parçaya bölünür mü?

$\ddot{O}_3$: Bölünmez. (Öğrencinin kafası karışmıştı)

A: Çemberi oynatabilir misin? Büyütüp küçültebilir misin?

(Öğrenci şekli büyütüp küçülttü)

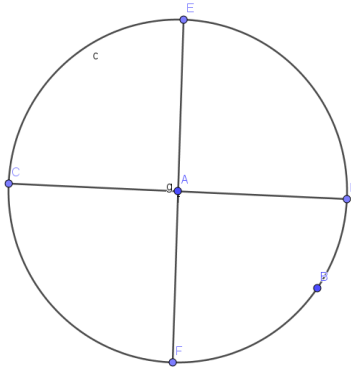
A: Şimdi diğer doğruları silelim. Çemberden geçen tek bir doğru kalsın (öğrenci istenilen şekli yaptı)

A: Şimdi çemberi oynatalım ve yayları ölçsek her zaman iki eş parça mı çıkar? (Öğrenci yay uzunluklarını ölçmeyi deniyor)

*Ölçtüğü uzunluklar aslında iki nokta arası uzaklıktı.

$\ddot{O}_3$: Uzunluklar farklı çıktı. Bu yüzden iki eş parçaya ayrılmadı.

Öğrenci çemberi iki eş parçaya ayırmanın merkezden geçen doğru ile olabileceğini sezgisel olarak düşünmektedir. Bu bağlamda merkez noktasından geçen ve çemberi farklı iki noktada kesen bir doğru parçası çizmiştir (görselleştirme). Daha sonra da bu doğru parçasının çap olup olmadığına dair Geogebra yazılımını kullanarak büyütme-küçültme, yay uzunluklarını ölçme işlemleri yapmıştır (çizim araçları). Benzer şekilde $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_1$ da benzer açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu öğrencilere ilaveten $\ddot{O}_5$ farklı bir yaklaşım daha önermiştir:



Şekil 16. $\ddot{O}_5$ 'in Geogebra üzerindeki çalışması

$\ddot{O}_5$: Zaten merkezi belli ya şimdi bunun. Ben merkezden geçen bir doğru parçası çizsem bunu iki eş parçaya ayırır. Çapları gören yaylar eşit (öğrenci çemberin merkezinden geçen yatay ve dikey doğru parçaları çizdi).

A: Bu soruyu kâğıt ortamında düşünelim. Bir çemberi iki eş parçaya nasıl ayırırsın?

$\ddot{O}_5$: Yine merkezini belirlerim.

A: Nasıl belirlersin? Bir çemberin merkezi nasıl bulunabilir?

$\ddot{O}_5$: Pergel yardımıyla.

A: Peki pergel nasıl kullanırsın kâğıt-kalem ortamında merkezi belirlemek için?

$\ddot{O}_5$: Zaten pergel kâğıda batırıp çember oluşturmak için çevirirken merkezini esas alarak çeviriyoruz ya.. Kâğıda batırdığımız nokta direkt merkezi olur.

A: Başka bir yol var mı peki aklına gelen?

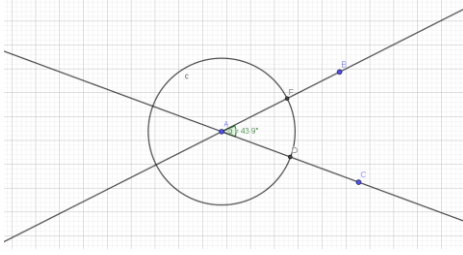
$\ddot{O}_5$: Eğer kâğıtta olsaydı kesip katlayabilirdim.

A: Nasıl yapardın mesela?

$\ddot{O}_5$: Kâğıda bir çember çizer ve çemberi kâğıttan keserek çıkartırdım. Sonra onu iki eş parçaya katlarsak yine iki eş parçaya ayrılırdı.

$\ddot{O}_5$ de başlangıçta $\ddot{O}_3$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_1$ gibi çemberi iki eş parçaya ayırmanın yolunun çapı belirlemek olduğunu düşünmektedir. Bu düşüncesine ek olarak, pergel yardımıyla (çizim aracı) çemberin merkezini bulabileceği ve kâğıda çember çizme (görselleştirme) ve kesip-katlama (çizim aracı) yoluyla da çapı oluşturabileceğini iddia etmektedir.

Bu öğrencilerin düşüncesinden farklı olarak $\ddot{O}_4$ doğruların kesişiminden merkez noktayı bulmaya yönelmiştir:



Şekil 17. Ö₄'ün Geogebra üzerindeki çalışması

Ö₄: Nasıl ayırırım? Önce doğru parçası oluştursam. Ondan sonra onun üzerinde bir çember belirlesem. Doğru. İlk önce üç tane nokta belirledim. Ondan sonra doğru parçası ikonundan A ve B doğru parçasını oluşturdum. İkinci bir doğru parçası oluşturdum.

A: Doğru parçalarını oluşturdun. Sıradaki işlemin ne olacak?

Ö₄: Çemberi iki eş parçaya ayırabilmem için bence doğru parçaları işime yarayacak. Yani eşitleyebilecek miyim ona bakacağım. A ve B arasında bir nokta belirledim. Kesiştirdim. Aslında ortasını bulsak. A ile C'nin. Ondan sonra ne yapabiliriz?

A: Ortasını bulma sebebin ne? Neler düşünüyorsun?

Ö₄: Çember çizmeyi düşünüyorum. Çemberi A noktasına çezeceğim. A ile D noktası arası ile C ile D noktası arası birbirine eşit olacak. Ama bu benim ne işime yarayacak?

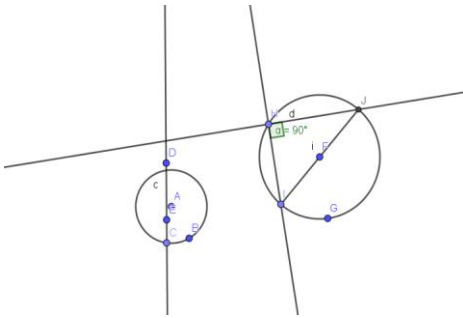
Öğrenci doğruları kesiştirdiği nokta olan A noktasına çemberi çizdi. Şekle baktı.

A: Aklına gelen başka bir yol var mı?

Ö₄: Aslında açıları ölçsem? (Çemberde bulunan merkez açıları ölçtüm).

Ö₄, doğruları kullanarak muhtemelen doğrular üzerinde yarıçapı oluşturma ve bu doğruların kesişim noktasından merkezi işaretlemeyi (görselleştirme) düşünmektedir. Bu sezgisel düşünme biçimi daha önce değinilen öğrencilerden farklılaşmaktadır.

Genel olarak, öğrenciler çemberi iki eş parçaya ayırmayı sezgisel olarak düşünmektedirler. Kimisi çapı oluşturmaya çalışırken, kimisi yarıçap ve merkeze dair veriler elde etmeye çalışmaktadır. Bu bağlamda gösterimsel oluşum aktif hale gelmiştir. Diğer taraftan Geogebra yazılımını kullanarak, yani bir çizim aracını tercih ederek bu işlemleri yapmaya çalışmışlardır. Bu geçiş sürecinde araçsal oluşum önemli bir rol oynamıştır. Dolayısıyla öğrenciler Gös-Arç düzlemine karşılık gelen yorumlamalar yapmışlardır. Öğrenciler herhangi bir sezgiye dayanarak cevaplar oluşturmaya çalışmışlardır. Bu ise onların Geometri I (Doğal geometri) paradigmasında çalıştıklarını göstermektedir. Farklı olarak, Ö₆ mülakat sırasında bu soruya şöyle bir açıklama yapmıştır:



Şekil 18. Ö₆'nın Geogebra üzerindeki çalışması

Ö₆: Çemberin direkt çapını düşünüyorum. Yani ikiye katlarmış gibi katlayınca olabilir.

A: Ne yapacaksın bu soruda?

Ö₆: Önce çemberi çizeyim. Merkezden geçen bir doğru çizersen iki eş parçaya ayrılabilir.

A: Çemberi ya da doğruyu sürükleyerek her zaman iki eş parçaya bölünmüş olur mu sence? (Öğrenci doğruyu sürükledi).

Ö₆: Aaa.. Olmadı.

A: Peki çemberi iki eş parçaya ayırmak için başka bir yol var mı sence?

Ö₆: Çevre açısı çizdikten sonra çevre açısı 90 derece olduğunda gördüğüm, elde ettiğimiz üçgen tam çapı oluyordu. Önce bir çember çizeyim. Çemberi kesen bir doğru ve bu doğruya dik bir doğru çizeyim. (Öğrenci açıyı ölçerek doğrular arasında kalan açının 90 derece olduğunu teyit ediyor). Şurası çap oluyor. (I ve J noktalarını göstererek). Çemberi iki eş parçaya böldüm.

A: Peki kâğıt-kalem ortamında bir çemberi iki eş parçaya ayır desem nasıl yapardın?

Ö₆: Çemberin en alt ucundan başlayıp kirişler çizdim. Daha sonra en uzununu belirleyip...

A: En uzununu nasıl belirledin bu kirişlerin?

Ö₆: Bilmiyorum. Başka kâğıdı katlardım. Kâğıdın ortasına çember çizer, çemberi kesip çıkarırdım. İkiye katlardım.

Ö₆, çemberi iki eş parçaya ayırmak için çapı çizmenin (görselleştirme) gerekli olduğunu düşünmektedir. Bunun için “çapı gören çevre açısı 90 derecedir” teoreminden (nesnenin anlamı) yola çıkarak birbirine dik doğrular inşa etmiş ve bunlar arasındaki açının 90 derece olduğunu teyit etmiştir (ispatlama). Başka bir yaklaşım olarak, çemberin en ucundan başlayarak kirişler çizme, kâğıda çemberi çizme (görselleştirme) ve bu çemberi

kesip çıkararak ikiye katlama (*çizim aracı*) gibi önerilerde bulunmuştur. Bu öğrenci ilk kısımda, çemberi iki eş parçaya ayırmanın, çemberin tam ortasından (merkezinden) geçen bir doğru/doğru parçası (çap) ile sağlanabileceğini sezgisel olarak düşünmektedir. Buradaki eylemlerinde daha çok *gösterimsel oluşum* aktif hale gelmektedir. Bununla birlikte, çemberin çapını inşa etmede öncül bazı teoremleri (burada çapı gören çevre açı diktir) kullandığından söylemsel oluşum önemli hale gelmiştir. Dolayısıyla Gös-Syl düzleminde bir açıklama yapmıştır. Burada öğrencinin Geometri II (Doğal aksiyomatik geometri) paradigmasında bir çözüm geliştirdiği söylenebilir. Diğer taraftan, öğrenci önerdiği iki yaklaşımda Geometri I (Doğal geometri) paradigmasında açıklama yapmıştır. Çemberin en alt ucundan başlayarak kirişler çizme esnasında *gösterimsel oluşum* aktif hale gelirken, bu kirişlerden en uzununu çizmede araçsal oluşum kullanılmaktadır. Bu ise Gös-Arç düzlemine geçiş yaptığı anlamına gelmektedir. Benzer şekilde, çemberi çizme esnasında gösterimsel oluşum, çizilen çemberi keserek katlamada ise *araçsal oluşum* önemli olmaktadır. Böylece öğrenci yine Gös-Arç düzleminde bir cevaba geçiş yapmaktadır.

Genel olarak, öğrencilerin sorular karşısındaki geometrik çalışmaları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 5. Soru 3 için Öğrencilerin Geometrik Çalışmalarına İlişkin Çetele Tablosu

Öğrenci	Cevap Süresi	Paradigma			Oluşum			Düzlem		
		Geo I	Geo II	Geo III	Gös	Arç	Syl	Gös-Arç	Gös-Syl	Arç-Syl
Ö ₁	3' 16''	X			X	X		X		
Ö ₂	2' 13''	X			X	X		X		
Ö ₃	5' 54''	X			X	X		X		
Ö ₄	5' 05''	X			X	X		X		
Ö ₅	2' 04''	X			X	X		X		
Ö ₆	7' 14''	X	X		X	X	X	X	X	

Tablo 5 incelendiğinde, öğrencilerin en fazla Geometri I paradigmasına karşılık gelen cevaplar verdikleri görülmüştür. Sorularda Geometri III paradigmasına yönelik cevaba rastlanılmamıştır. Tüm öğrenciler *gösterimsel oluşumu* aktif olarak kullanmışlardır. Bununla birlikte, *araçsal oluşumu* kullanan öğrenciler de olmuştur. *Söylemsel oluşumu* sadece bir öğrenci kullanmıştır. Son olarak, öğrencilerin cevapları Gös-Arç ve Gös-Syl düzlemlerinde dağılım göstermiştir. Arç-Syl düzleminde cevaplar geliştiren öğrenciye rastlanılmamıştır. Öğrencilerden bir tanesi (Ö₆) ise önce Geometri II paradigmasında cevap sunmuş, daha sonra Geometri I paradigmasına karşılık gelen cevap vermiştir (Gös-Syl → Gös-Arç).

4. Tartışma ve Sonuç

Dinamik geometri yazılımları, öğrencilerin geometrik çalışmalarını şekillendiren önemli fırsatlar sunmaktadırlar (Gomez-Chacon & Kuzniak, 2015; Gomez-Chacon vd., 2016). Bu çalışmada gerek kendi öğretmenlik deneyimim boyunca gözlemlediğim, gerekse de ilgili literatürde öğrencilerin öğrenme güçlüğü yaşadıkları bir konu olarak vurgulanan çember konusuna odaklandım ve bu konu bağlamında öğrencilerimin geometrik çalışmalarını inceledim. Dinamik geometri yazılımları (özelde GeoGebra) gibi teknolojik bağlamlarda yapılan öğretimin öğrencilerimin geometrik çalışmasına olan etkisini incelemek amacıyla eylem araştırması yöntemine odaklandım. Nitekim Geogebra'nın geometrik kavramları görselleştirmede önemli bir çizim aracı olduğuna gerek lisans gerekse de lisansüstü eğitimim süresince aldığım derslerden aşınayım. Bu yazılımdan, geometrik şekilleri kolayca çizme, ilişkileri keşfetme ve değişimleri (özellikle sürgü aracı ile) dinamik olarak gözlemleme, çeşitli geometrik modeller inşa etme, ispat ve genelleme yapma gibi pek çok amaçlarla faydalanılabilmektedir. Geogebra'nın bu kadar çok özelliği içermesi ve farklı amaçlarla kullanılmaya açık olması, onu eğitim sürecinde sıklıkla tercih edilen bir araç haline getirmektedir. (Kılıç & Kaleli-Yılmaz, 2024). Bu bağlamda Geogebra'yı temel alan öğrenme ortamları oluşturulmakta ve teknoloji destekli etkinlikler tasarlanmaktadır.

Çember ile ilgili yaşanan güçlükler, geleneksel öğrenme ortamında bu konunun öğrencilere somutlaştırarak öğretilmemesinden ileri gelmektedir. Ancak, teknoloji sınıflara girdikten sonra öğretmenlere bu konuyla ilgili farkındalık yaratabilme imkânı doğmuştur. Teknolojinin zenginliklerinden yararlanabilmek adına bu çalışmada dinamik geometri ortamında çember konusu ile ilgili etkinlikler yapmaya karar verdim. Bu bağlamda 8 adet etkinlik geliştirdim ve uyguladım. Geleneksel öğrenme ortamında çemberin tanımı ve özellikleri verilmekte ve sonra bu tanım ve özelliklerden hareketle örnek çözümler yapılmaktadır. Bu çalışmada, uygulama esnasında öğrenciler, Geogebra'yı kullanarak çemberin temel ve yardımcı elemanlarını etkinliklerde istenilen şekilde çizebilmiş, sürüklemeye yapabilmıştır; dolayısıyla çember konusunu öğrenmek de kolaylaşmıştır. Bu kolaylıklar

klinik mülakatlardaki cevaplara da yansımıştır. Klinik mülakatlarda öğrencilerin geometrik çalışmalarının Gös-Arç ve Gös-Syl düzlemlerinde yoğunlaştığı görülmüştür. Bu ise öğrencilerin Geometri I ve Geometri II paradigmalarında çalıştıkları anlamına gelmektedir. Oysa ki, lise kademesine gelen öğrencilerin Geometri II paradigmasını kullanmaları beklenmektedir (Çalışkan-Dedeoğlu, 2016). Buna rağmen, çalışmadaki öğrenciler geliştirilen dinamik geometri etkinlikleri ile ancak Geometri II paradigmasında cevaplar verebilmişlerdir. Ayrıca iki öğrencinin verdiği cevapta GÇU modelindeki Gös-Arç ve Gös-Syl düzlemleri arasında geçişlerin de olduğu görülmüştür. Bu öğrenciler önce Geometri II düzeyinde cevaplar sunup daha sonra ise Geometri I düzeyinde cevaplar vermişlerdir. Öğrencilerin bir soruya yönelik farklı eylemlerinde farklı düzlemlere geçişlerin yaşanması durumu Gomez-Chacon vd. (2016) çalışması ile benzerlik göstermektedir. Bu çalışmada da geometrik problemlere verilen cevaplarda düzlemler arasında geçişlerden bahsedilirken “zig-zag” kavramı kullanılmıştır.

Araştırmada her ne kadar öğrencilerden Arç-Syl düzleminde cevaplar gelmemiş olsa da çalışmadaki etkinliklerin öğrencilerin geometrik çalışmalarını geliştirdikleri söylenebilir. Nitekim sürecin başında öğrenciler problemlere görselleştirme odaklı yaklaşırken sürecin sonuna doğru ispata az da olsa yer vermeye başlayan öğrenciler de olmuştur. Dolayısıyla öğrencilerimi Gös-Arç düzleminde Gös-Syl düzlemine; yani Geometri I'den Geometri II'ye taşıma yönündeki hedefim etkili olmuştur. Öyle ki, uygulamadan belirli bir süre sonra (yaklaşık bir ay sonra) yapılan yazılı sınavda, çember konusu ile ilgili başlangıçta öğrenme güçlüğü olan öğrencilerimin sorulara doğru yanıtlar verdikleri görülmüştür. Geleneksel öğrenme ortamında anlatılan bu konunun zaman içinde unutulduğunu öğretmenlik deneyimimden biliyorum. Üniversite sınavına hazırlanan öğrencilerin çember konusunda uzunluk, açı başta olmak üzere sorunlar yaşadıklarını ve bu sorunların da çember konusunu zihinlerinde tam olarak görselleştiremediklerinden kaynaklandığını görüyordum. Çember konusunu somutlaştırıp zihinlerine yerleştiremedikleri zaman konu ilgili diğer sorularda da başarılı olamamaktaydılar. Geogebra ortamında etkinlikler yoluyla anlattığım çember konusunun geleneksel öğrenme ortamına kıyasla daha etkili olduğunu da gördüm. Yapılan Geogebra etkinliklerinin öğrenciler tarafından ilgi çekici olması, teknoloji ile zenginleştirilmiş ortamın öğrencileri daha çok motive etmesi ve öğrencilerin derslere katılma isteklerinin yüksek olması bu kavramların öğrenilmesinde önemli rol oynamıştır.

Bu çalışmanın ilk bölümünde gerçekleştirilen 8 adet etkinlikten hemen sonra klinik mülakat çalışmasının yapılması bazı sınırlıklara neden olmuştur. İki çalışma arasında yeterli sürenin olmaması öğrencilerin klinik mülakatta yer alan soruları doğrudan dinamik geometri ortamını kullanarak çözmeye çalışmalarına ve dolayısıyla düşüncelerinin sınırlandırılmasına neden olmuştur. Örneğin, öğrencilerden çemberin merkezini bulmaları istendiğinde öğrenci teknolojik ortamda çemberi çizerek zaten merkezinin belli olduğunu söylemiştir. İki çalışma ortamında yeterli sürenin verilmesi durumunda öğrencinin dinamik geometri ortamından uzaklaşarak sorulan sorulara daha açıklayıcı ve özgün yanıtlar verebileceği düşünülmektedir. Bunun yanında öğretmenlerin de dinamik geometri yazılımları hakkında bilgi sahibi olmaları ve öğrencilerine de bu yazılımı öğretmeleri beklenmektedir. Böylece serbest bir çalışma ortamı oluşturulduğunda öğrencilerin geometrik problemlere nasıl ve ne açıdan yaklaştıkları daha iyi ortaya konulabilir. Ayrıca çalışmadaki öğrencilere ara ara dinamik geometri yazılımına ilişkin düşünceleri sorulmuş ve öğrencilerden olumlu dönütler alınmıştır. Öğrencilerden alınan dönütlerde ön plana çıkan düşünce ise dinamik geometri yazılımı ile gerçekleştirilen öğretimin öğrencilerin görsel, uzamsal düşüncelerini arttırdığı yönündedir. Geometrideki soyut kavramların öğrencilerin zihinlerinde canlandırabilmeleri, matematik eğitimi açısından istenen durumlardan biridir. Ayrıca bu çalışmada öğrencilerin verilen ifadeye uygun şekilleri çizebilme becerilerinin, tahmin yeteneklerinin ve matematiksel açıklama yapabilme becerilerinin arttığı görülmüştür. Tüm bu sonuçların ilerleyen süreçlerde öğrencilerin geometri başarısına olumlu katkılar yapacağı düşünülmektedir.

5. Öneriler

Bu çalışmada öğrenciler sadece dinamik geometri yazılımları ile çalışmaya yönlendirilmiştir. Bu ise üretilen cevapların bu yönde olmasını tetiklemiştir. Bundan sonra yapılacak çalışmalarda öğrencilerin çalışma alanlarının sınırlandırılmaması, farklı ortamlarda da çalışabilme fırsatı sunulması önerilmektedir. Ayrıca çalışma eylem araştırması yöntemiyle gerçekleştirilmiş olup ilerleyen çalışmalarda aynı sınıf seviyesinden dinamik geometri ortamları kullanılarak etkinliklerin gerçekleştirildiği bir kontrol grubu ve geleneksel ortamda etkinliklerin gerçekleştirildiği bir deney grubu alınarak yarı deneysel bir çalışma gerçekleştirilebilir. Böylelikle dinamik geometri ortamları ile geleneksel ortamlarda yapılan etkinliklerin öğrencilerin geometrik çalışmalarında oluşturacağı değişiklik, gelişim ve ilerleme karşılaştırılabilir.

Finansman: Bu çalışma için herhangi bir fon bildirilmemiştir.

Çıkar beyanı: Yazar herhangi bir çıkar çatışması beyan etmemektedir.

Kaynaklar / References

- Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through a networking lens. *ZDM*, 48(6), 935-939. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0810-z>
- Baki, A. (2020). *Matematiği öğretme bilgisi (3. bs)*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık
- Büyükoztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2017). *Bilimsel araştırma yöntemleri (23. Baskı)*. Ankara: Pegem akademi.
- Coutat, S., & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 97-126.
- Çalışkan-Dedeoğlu, N. (2016). Geometrik Paradigmalar. E. Bingölbalı, S. Arslan, & İ.Ö. Zembek (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler içinde* (s. 291-305). Pegem Akademi, Ankara.
- Çepni, S. (2014). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş (7. bs)*, s. 91-104. Trabzon: Celepler Matbaacılık.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2015). Networking of theories as a research practice in mathematics education. Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 201-226. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9462-4>
- Gómez-Chacón, I. M., Romero Albaladejo, I. M., & del Mar García López, M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: A Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(6), 909-924. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0755-2>
- Güven, B., & Karataş, İ. (2003). Dinamik geometri yazılımı cabri ile geometri öğrenme: Öğrenci görüşleri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2(2), 67-78.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283-312.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). *Elementary geometry split into different geometrical paradigms*. In Proceedings of the Third Congress of the European Research in Mathematics Education (s. 1-10). Université de Bologne.
- İmamoğlu, Y., Özcan, Z. Ç., Pesen, M., & Erkin, E. (2023). Bir geometri öğretimi dersinin geometrik çalışma düzenleri modeline göre incelenmesi. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 40-2 (2), 101-118. <https://doi.org/10.52597/buje.1128602>
- Johnson, A. P. (2002). *A short guide to action research*. Boston: Allyn & Bacon.
- Kılıç, B., & Kaleli-Yılmaz, G. (2024). 7. Sınıf matematik dersi geometri öğrenme alanına yönelik hazırlanan GeoGebra etkinlikleri hakkında öğretmen görüşleri. *Turkish Journal of Mathematics Education*, 5(2), 42-69. <https://doi.org/10.16949/turcomat.21979>
- Kuhn, T. S. (1966). *The structure of scientific revolutions (2nd ed.)*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education Science & Technology Education* (2), 6, 167-187. <https://doi.org/10.1080/14926150609556694>
- Kuzniak, A. (2014). Understanding geometric work through its development and its transformations. In *Transformation-A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 311-325). Springer, New York, NY.
- Kuzniak, A. (2018). Thinking about the teaching of geometry through the lens of the theory of Geometric Working Spaces. P. Herbst et al. (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools içinde* (pp. 5-21). New York, NY: Springer.
- Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: A study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271-289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>
- Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches on geometrical work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 129-147. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9304-7>
- Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4(I)), 17-27. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741b>
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM: the international journal on mathematics education*, 48(6), 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Milli Eğitim Bakanlığı (2024). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı (Hazırlık, 9, 10, 11 ve 12. sınıflar) Türkiye yüzyılı maarif modeli*. Ankara: MEB.

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Tomal, D. R. (2003). *Action research for educators*. Rowman & Littlefield Publishers.
- URL-1 (2022). <https://ogmmateryal.eba.gov.tr> adresinden 04 Nisan 2022 tarihinde erişilmiştir.
- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.

Ek 1. Uygulama Sürecinde Kullanılan Etkinlikler

Etkinlik 1: Örümcek Ağı

Amaç: Çemberde verilen merkez açı ve çevre açı kavramları arasındaki farkı ayırtedebilme.

Örümcek ağı, örümcekler tarafından genellikle avlarını yakalamak için üretilen proteinli örümcek ipeği kullanılarak inşa edilen yapılardır. Evde bulunan daire şeklindeki bir bota deliğine ağ yapan örümcekler sırasıyla J, I, H, K ve G noktalarında yer almaktadırlar. Bu örümceklerin ağ yapmak için başlangıç ve bitiş noktaları Tablo 1’de verilmiştir. Örümcek başlangıç noktasından bitiş noktasına kadar doğrusal bir şekilde ağ yapmaktadır. Şekil 1’de yer alan I, A, B ve K, A, D noktaları kendi aralarında doğrusaldır.

- Örümceklerin takip ettikleri ağ yollarını kullanarak çember üzerinde çiziniz.

Tablo 1. Örümceklerin takip ettiği ağ yolları

Örümcekler	Başlangıç	Bitiş
1.Örümcek	J	M
2.Örümcek	I	B
3.Örümcek	H	J
4.Örümcek	K	D
5.Örümcek	G	F

Şekil 1. Örümcek yolları

- Çember üzerinde oluşturduğunuz yolların bazılarının kesişmesi sonucu oluşan açıları ve açıların çevre ya da merkez açı olma durumlarını Tablo 2’de uygun yerlere yazınız.

Tablo 2. Açıların çevre ya da merkez açı olma durumları

Açı İsimleri	Çevre Açı	Merkez Açı

Etkinlik 2: Tekerlek

Amaç: Çemberde teğet, kiriş, çap, yay ve kesen kavramlarını açıklayabilme.

Şekil 1. Tekerlek modeli

Geogebra yardımıyla Şekil 1’deki yapıyı oluşturunuz. Çizim yaparken tekerleğin mevcut kalınlıklarını ihmal ediniz. Tabloda verilen örnek durumları oluşturduğunuz yapı üzerinde araştırarak bunların karşılık geldiği kavramı işaretleyiniz.

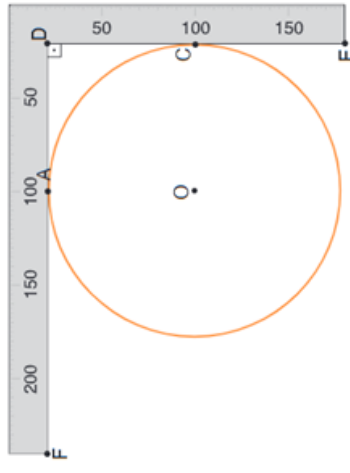
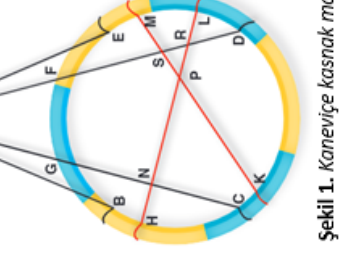
Tablo 1. Örnek durumların karşılık geldiği kavramlar

Örnek Durum	Teğet	Kiriş	Çap	Yay	Kesen
K noktasından D noktasına kadar uzanan çember parçasıdır.					
N ve D noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.					
M noktasından K noktasına çizilen doğru parçasıdır.					
Çemberi sadece G noktasında kesen doğrudur.					
B ve H noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.					
A ve E noktalarından geçen doğrudur.					

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız. Cevabınızdan hareketle bir yorum yapınız.

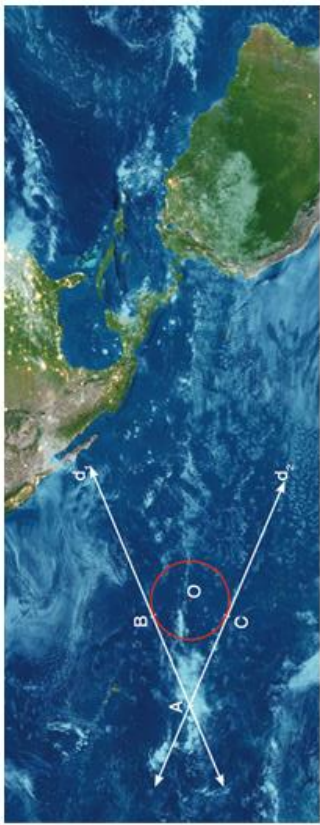
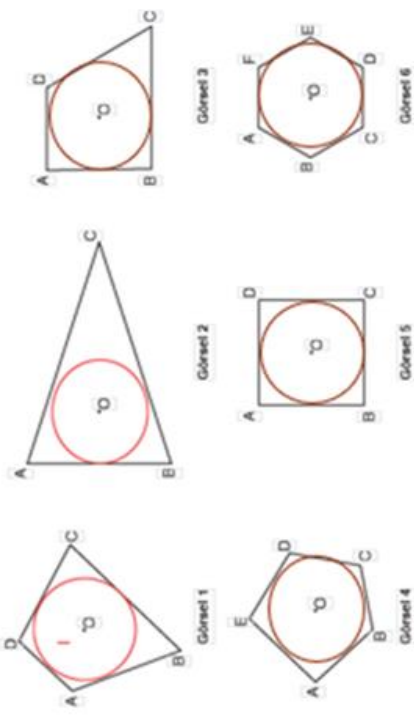
- N ve D noktalarını birleştiren doğru parçasına eşit uzunlukta olan doğru parçası/parçaları olabilir.
Yorum:
- noktalarının birleşimi sonucu oluşan doğru parçası en uzun doğru parçasıdır.
Yorum:

Ek 1'in devamı

Etkinlik 3: Tahliye Boruları	Etkinlik 4: Kaneviçe Kasnağı
Amaç: Çemberde teğet-kiriş açısı açıklayabilmek.	Amaç: Çemberde iç açı ve dış açı kavramlarını ifade edebilmek.
Dik kesişen iki yolun iç tarafına şekilde gösterildiği gibi O merkezli daire şeklinde bir havuz yapılmıştır. Bu havuz [FD]'na A noktasında, [DE]'na C noktasında teğet olacak şekilde yerleştirilmiştir. Havuzun zeminine yerleştirilmesi düşünülen tahliye borularının konumları şu şekildedir: Bir ucu A noktasında olan ve havuzun merkezinden geçen yeterli uzunluktaki tahliye borusunun daire üzerindeki diğer ucu B noktası olarak isimlendirilmiştir (Yolun kalınlığı ihmal edilmiştir). Aşağıda verilen şekli Geogebra kullanarak çiziniz.	Yıldız, kaneviçe kasnağını siyah ipler yardımıyla odasının duvarına asmıştır. Kırmızı ipleri süs amaçlı kullanmıştır ve ipler gergin bir şekilde durmaktadır. Yıldız'ın duvara astığı kasnak Şekil 1'de olduğu gibi modellenmiştir.
	 Şekil 1. Kaneviçe kasnak modeli
1) Havuza ait [BC] kirişi ile [CE]'nin teğet değme noktası olan C noktasında kesişmesi ile oluşan $\widehat{BCE}$ ve $\widehat{BCD}$ açıları hangi açı türünü belirtmektedir? 2) Görselde A noktasında oluşan teğet-kiriş açıları isimlendiriniz. 3) Teğet-kiriş açının ölçüsü ile gördüğü yayın ölçüsü arasında nasıl bir ilişki vardır? 4) Görseldeki [AB] ile ilgili olarak nasıl bir yorum yapabilirsiniz? 5) AB yayının ölçüsü ile BAF yayının ölçülerini karşılaştırınız. 6) Elde ettiğiniz çizimlerden de yararlanarak aşağıda koyu renkle verilen ifadelerden uygun olanı daire içine alınız. a) Teğet-kiriş açısı gördüğü yayın ölçüsünün yarısına/iki katına eşittir. b) Aynı yayı gören çevre açısı ve teğet-kiriş açıların ölçüleri eşittir/farklıdır.	Duvardaki çivinin konumu A, siyah iplerin bağlandıkları noktalar C, D, F, G ve kırmızı iplerin bağlandıkları noktalar H, K, L, M olarak adlandırılmıştır. İplerin kesiştikleri noktalar, N, P, R, S olarak adlandırılmıştır. Yıldız, siyah iplerden ikisini B ve E noktalarından kasnağa sabitlemiştir (İplerin ve kasnağın kalınlıkları ihmal edilecektir). - Köşeleri N, P, R ve S noktaları olan ve kasnağın iç kısmında oluşan açılar kümesi T; köşesi A noktası olan ve kolları siyah iplerin tamamı ile ifade edilen açılar kümesi Y olmak üzere T ve Y kümelerini Venn şeması yöntemiyle gösteriniz. - T ile Y kümesine ait açıların çemberin hangi temel elemanları ile oluştuğunu yazınız. - Oluşturulan T kümesinde ve Y kümesinde yer alan açılar çemberin hangi bölgesinde yer almaktadır. T ve Y kümesinde yer alan açı çeşitleri ile ilgili yorum yapınız.

Etkinlik 5: Atık Su Arıtma Projesi Amaç: Çemberde girişin özelliklerini göstererek işlemler yapabilmek. Atık su arıtma, gün geçtikçe hızlı bir şekilde kirlenen, temel yaşam unsuru olan suyun evsel veya endüstriyel amaçlarla kullanıldıktan sonra ıslah edilmesi işidir.	Etkinlik 6: Cephane Teslim Rotaları Amaç: Bir çember ile bir doğrunun birbirlerine göre durumlarını belirleyebilmek.
 Şekil 1. Mahalleler (A, B, C, D, E) Şekil 1'de çember şeklindeki bir bölge etrafına konumlanmış olan A, B, C, D ve E mahalleleri gösterilmektedir. Birbirine komşu olan mahallelerin kanalizasyon kuyuları, farklı renklerdeki borular ile birbirine bağlanmıştır. Siyah, turuncu, yeşil ve kırmızı boruların uzunlukları sırasıyla 800 m, 600 m, 600 m ve 900 m'dir. Su arıtma tesisi, çembersel bölgenin merkezindeki O noktasında bulunmaktadı ve tesisin her bir mahalleye uzaklığı 500 m'dir. Mahalleler arasındaki borulara atık su taşıma hattı döşeyecek olan firma, maliyeti en ekonomik şekilde hesaplamak istendiğinden boruları merkez ile mahalleler arasındaki en kısa hattan döşeyecektir. Döşenecek hat için kullanılacak borunun metre fiyatını 200 TL olarak belirleyerek bu tutarı mahalle sakinlerinden talep etmiştir. Toplam maliyet iki mahallenin sakinleri tarafından ortaklaşa ödenecektir. Geogebra yardımıyla yukarıdaki yapıyı oluşturunuz. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. - Tesisin borulara çekilecek hatlardan maliyeti en az olanın hangi iki mahalle arasına çekilen boru hattı olduğunu bulunuz. - Tesisin borulara çekilecek hatlardan maliyeti en fazla olanın hangi iki mahalle arasına çekilen boru hattı olduğunu bulunuz. - Yukarıdaki sorulara cevap oluştururken yararlandığınız/fark ettiğiniz özellikleri açıklayınız.	 Şekil 1. Cephane teslim rotaları Yukarıda verilen görselde $A(1, -7)$ noktasında bulunan askerî helikopter $M(1, -2)$ merkezli ve 4 birim yarıçaplı çember üzerindeki bazı noktalara cephane bırakacaktır. Helikopter doğrusal bir rota üzerinde hareket ederek cephaneyi bıraktıktan sonra aynı rotada yoluna devam edecektir. Helikopter pilotu cephaneleri bırakmak için $k: 3x + 4y + 25 = 0$, $l: 3y - 7x + 28 = 0$ ve $m: 11y - 7x + 84 = 0$ doğrusal denklemleri üzerindeki rotalardan herhangi birini tercih edecektir. Geogebra yardımıyla yukarıdaki yapıyı oluşturunuz. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. $A(1, -7)$ noktasında bulunan askerî helikopterin yukarıda doğrusal denklemleri verilen rotalardan hangisinden gitmesi durumunda kaç kere cephane bırakacağını bulunuz. - Helikopter pilotu tek bir noktaya cephane bıraktığı rotayı tercih ettiğine göre pilotun $A(1, -7)$ noktasından cephaneyi bıraktığı noktaya kadar aldığı yolun uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz. - Üç rotanın merkeze en yakın uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz. Buradan yola çıkarak bir çember ve bir doğrunun birbirine göre durumlarını matematiksel olarak ifade ediniz.

Ek 1'in devamı

Etkinlik 7: Gemi Rotaları	Etkinlik 8: Bilezik Kapları												
Amaç: Teğet ve teğet parçası kavramlarını açıklayabilme.	Amaç: Teğetler dörtgeninin tanımını yapabilmek.												
Aşağıdaki şekilde bir okyanus üzerinde hareket eden bir kuru yük gemisi ile bir petrol tankerinin izlediği rotalar sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları ile gösterilmektedir. Okyanus üzerindeki tehlikeli bir nokta temsili olarak O merkezli çember ile sınırlanılarak modellenmiştir. Geminin tehlikeli noktaya yaklaşmaması için rotalarını O merkezli çemberin içine girmeyecek şekilde belirlemektedir.  Şekil 1. Gemi rotaları İki geminin izlediği rotalar olan d_1 doğrusu, d_2 doğrusu ve O merkezli çember sırasıyla sadece B ve C noktalarında kesişmektedir. Geminin rotalarını gösteren d_1 ve d_2 doğruları tehlikeli bölgeyi sınırlayan O merkezli çembere teğettir. 1) Buna göre teğet kavramının tanımını yapınız. 2) Geminin izlediği rotaları temsil eden rotalar A noktasında kesişmektedir. A ve B noktaları ile A ve C noktaları arasında kalan doğru parçaları teğet parçasıdır. Buna göre "teğet parçası" kavramının tanımını yapınız. 3) Teğet parçalarının özelliği gereği bir geminin A'dan B'ye kadar aldığı mesafe ile diğer geminin A'dan C'ye kadar aldığı mesafe birbirine eşittir. Buna göre çember dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunluğu ile ilgili hangi sonuca ulaşabileceğinizi yazınız.	 Bir kuyumcu farklı çokgensel modellerde bilezik kapları tasarlayarak online bir anket ile tasarımlarını müşterilerinin oylamasına sunuyor. Tüm bilezik kaplarını, içine konulan bileziği çevreleyen çember, kapların kenarlarına teğet olacak şekilde tasarlıyor. Müşteriler en çok beğendikleri modele en yüksek puanı, en az beğendikleri modele en düşük puanı vererek oylamayı tamamlıyorlar. Oylama sonucunda sırasıyla Görsel 1, Görsel 3 ve Görsel 5 en yüksek puanı alan ilk üç model seçiliyor. Tasarımcı, bu kap modellerinin ortak noktalarını Tablo 1'de özetliyor. Tablo 1. Bilezik kabının özelliği <table border="1"> <thead> <tr> <th>Bilezik kabının Özelliği</th> <th>Görsel 1</th> <th>Görsel 3</th> <th>Görsel 5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Bilezik kabının 4 kenarı vardır.</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>Bilezik kabını modelleyen dörtgenin kenarları bileziği çevreleyen çembere teğettir.</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </tbody> </table> Tabloda ortak özellikleri verilen Görsel 1, Görsel 3 ve Görsel 5'teki bilezik kaplarını modelleyen ABCD dörtgenleri için bir yorum yapınız.	Bilezik kabının Özelliği	Görsel 1	Görsel 3	Görsel 5	Bilezik kabının 4 kenarı vardır.	✓	✓	✓	Bilezik kabını modelleyen dörtgenin kenarları bileziği çevreleyen çembere teğettir.	✓	✓	✓
Bilezik kabının Özelliği	Görsel 1	Görsel 3	Görsel 5										
Bilezik kabının 4 kenarı vardır.	✓	✓	✓										
Bilezik kabını modelleyen dörtgenin kenarları bileziği çevreleyen çembere teğettir.	✓	✓	✓										