Which Teacher, Which Example Type?

Sevilay Alkan[a] and Bülent Güven[b]

[a] Ministry of National Education, Rize/Turkey (ORCID: 0000-0002-6918-3832)
[b] Trabzon University, Fatih Faculty of Education, Trabzon/Turkey (ORCID: 0000-0001-8767-6051)

Article History: Received: 14 December 2020; Accepted: 22 March 2021; Published online: 30 April 2021

Abstract: This study aims to examine the roles that secondary education mathematics teachers adopted in the teaching process and the example types they use in this process. The study, in which the case study approach was employed, was carried out with four mathematics teachers. Semi-structured interviews were conducted to determine teachers' beliefs about learning and teaching mathematics; each teacher's one-year education-training process was observed to depict these beliefs' reflections in the classroom, determine their roles, and identify the example types they used during the lessons. The example types used were analyzed according to the example classification developed by Alkan (2016). The framework created by Ernest (1991) was used in the analysis of teachers' roles. One of the teachers participating in the study was observed to play the role of *explainer*, and the other three teachers adopted the role of *instructor*. Besides, regarding the teachers' examples used in the lessons, improving and standard examples are used more; very few non-example and extreme examples were used, and no counterexample was used. Instructor teachers were found to use standard examples in their explanations throughout the lesson frequently. The teacher who adopted the explainer role used improving examples more than standard examples. Besides, explainer teacher uses more non-examples than instructor teachers. It is recommended to provide in-service training on teachers' beliefs about learning and teaching mathematics and examine teachers' roles and the example types used in these roles in detail in this training.

Keywords: Beliefs about learning and teaching mathematics, teacher roles, example types

Öz: Bu çalışmada orta öğretim matematik öğretmenlerinin öğretim sürecindeki öğretmen rolleri ile bu süreçte yararlandıkları örnek türlerinin incelenmesini amaçlanmıştır. Çalışma özel durum çalışmasına uygun olarak yürütülmüştür. Bu kapsamda seçilen 5 matematik öğretmeni ile matematik öğrenme ve öğretmeye yönelik inançlarını belirlemek için yarı yapılandırılmış mülakatlar yürütülmüş, bu inançların sınıf içi yansımalarını resmetmek, rollerini belirlemek ve dersin öğretimi esnasında kullandıkları örnek türlerini tespit etmek amacıyla her birinin bir yıllık eğitim -öğretim süreci gözlenmiştir. Kullanılan örnek türlerinin analizi Alkan (2016) tarafından geliştirilmiş olan örnek sınıflandırılmasına göre analiz yapılmıştır. Öğretmenlerin rollerinin analizinde ise Ernest (1991) tarafından oluşturulan çatı kullanılmıştır. Araştırmaya katılan öğretmenlerden birinin açıklayıcı, diğer üç öğretmenin ise öğretici öğretmen rolüne sahip olduğu gözlenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmenlerin derslerinde kullandıkları örnekler incelendiğinde geliştirici ve standart örneklerin daha çok kullanıldığı; örnek dışı ve uç örneklerin ise oldukça az, karşıt örneklerin ise hiç kullanılmadığı tespit edilmiştir. Öğretici öğretmenlerin ders boyunca açıklamalarında standart örneklerden sıklıkla yararlandıkları belirlenmiştir. Açıklayıcı rolündeki öğretmenin derslerinde standart örneklere göre geliştirici örneklerden daha fazla yaralandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca açıklayıcı olan öğretmenlerin öğretici öğretmenlere göre örnek dışı örneklerden daha fazla yararlandığı görülmüştür. Öğretmenlerin hizmet içi eğitimlerinde, matematiği öğrenme ve öğretmeye yönelik inançlarıyla ilgili eğitimlerin verilmesi, bunu yanı sıra öğretmen rolleri ile birlikte kullanılan örnek türlerinin de bu eğitimlerde detaylı bir şekilde incelenmesi önerilir.

Anahtar Kelimeler: Matematik öğrenme ve öğretmeye yönelik inançlar, öğretmen rolleri, örnek türleri

Türkçe sürüm için tıklayınız.

1. Introduction

A significant part of the studies in education involves the personal differences of students and teachers. Especially in studies on teachers' differences, teachers' beliefs about learning and teaching constitute one of the focus of interest in finding solutions to teaching problems (Uysal & Dede, 2019). This process, which started with Thompson's research in 1984, has shown that teachers' beliefs, perspectives, and preferences have an important role in shaping their explanations and behaviors during teaching. In learning environments, teachers' explanations and behaviors are as effective as their content knowledge (Erickson, 1993). Teachers' content knowledge and beliefs play a role in their instructional decisions and affect their classroom behavior and constitute their classroom roles (Haser, Kaya, Işıksal-Bostan, 2013).

Mathematics teachers may adopt roles such as instructor, explainer, or facilitator in their instructional decisions based on their mathematical beliefs about learning and teaching (Ernest, 1991). Among these roles, the teachers who adopted the instructor role aim to implement a procedure, show, explain, describe a material, and present it in the best way. Explainer teachers' role is to teach mathematical concepts, formulas, and operations to

Corresponding Author: Sevilay Alkan **email:** svlyalkn@gmail.com

* This paper is based on the doctoral dissertation prepared by the first author under the supervision of the second author.

Citation Information: Alkan, S. & Güven, B. (2021). Which teacher, which example type?. *Turkish Journal of Mathematics Education, 2*(1), 31-56.

the students best (Thompson, 1992). The facilitator teacher's role, on the other hand, is to take into account the misunderstandings of the students, describe new tasks for students to eliminate these misunderstandings, and create tasks and questions that will encourage students to do mathematical research (Kaleli-Yılmaz & Güven, 2014).

Teachers' roles in the classroom, the demonstrations, analogies, and examples they use in their explanations convey messages to students about mathematics knowledge and its nature (Mc Diamird, Ball & Anderson, 1983). Then, it can be said that the examples used by teachers in the teaching process give information about their views and understandings of the nature of mathematics as well as their knowledge of teaching mathematics. Considering that examples are an important communication tool between teachers and students, the example types that a teacher uses in teaching a subject and the example types' usage frequency can explain how he/she teaches. For example, suppose a teacher asks the students to give a counterexample suggesting that the opposite of a proposition may not be true; this could mean that he/she is encouraging the students to focus and think about the subject. Because counterexamples are used to eliminate students' overgeneralization or wrong or incomplete thinking. Then, it can be assessed whether the teacher is a facilitator or not, taking into account the teacher's other behaviors. In her study, Alkan (2016) examined the example types used by mathematics teachers and their instructional explanation dimensions and revealed a relationship between instructional explanation dimensions and the example types that teachers prefer in their lessons. Besides, it was found that one of the primary tools using which teachers communicate with their students in the classroom is the examples they use in their explanations. In this context, it can be said that the examples used by teachers are concrete reflections of their beliefs, their instructional explanation dimensions, in other words, their roles in the classroom.

1.1. Theoretical Framework

1.1.1. Teacher roles

Stating that teachers' beliefs about learning and teaching mathematics have reflections on teachers' practices, Ernest (1991) suggested that this reflection creates three different teacher roles: instructor, explainer, and facilitator. The teacher adopting the instructor's role undertakes showing, introducing, explaining, and exhibiting the material. On the other hand, the explainer focuses on mathematics content in the teaching activities and tries to teach mathematical concepts, formulas, and operations in the best way. The facilitator teacher focuses on problem-solving and creates learning environments that allow students to conduct mathematical research in line with the ideas and interests of the students (Thompson, 1992; Bütün, 2005).

In the table below, Ernest's (1991) belief models for teaching were discussed, and the indicators that teachers adopting instructor, explainer, and facilitator roles should have were formed.

Table 1. Teachers' roles and characteristics (Kaleli-Yılmaz & Güven, 2014)

Teacher role	Teacher
Instructor	• Prioritizes transactions and procedures • Emphasizes the proper use of mathematical symbols • Uses a material in the lesson to illustrate an algorithm, not for students to draw conclusions • Repetitions are an important part of the lesson • Feedbacks are in the form of correct or incorrect. If necessary, operations or repetitions are explained again.
Explainer	• Presents the course to students with a conceptual approach • Teaches mathematical concepts, formulas, and operations with many explanations in the best way. • Gives feedback directly with clues, explaining possible reasons for student misunderstanding • The materials are used along with the teacher's explanations for conceptual understanding.
Facilitator	• Teaches mathematics in problem-solving environments • The exploratory approach constitutes the basis of the activities. • Students' interests and daily activities are taken into account in activity design • New tasks are defined for students to clarify their misunderstandings. • Assign roles and responsibilities for students to learn mathematics

As can be understood from Table 1, the main purpose of a teacher who adopted the instructor's role is to apply the procedures proficiently. Student's mistakes are not very important to these teachers. Therefore, feedbacks are not given in learning environments (Kaleli-Yılmaz & Güven, 2014). Instructor teachers emphasize repetition in their lessons. Teachers who have an explainer role have a conceptual understanding of mathematical knowledge. They focus more on the content of the subject in the explanations they provide in learning environments. The teacher's main purpose is to make the student understand the mathematical concepts, formulas, and operations in the best way (Thompson, 1992). Therefore, students' readiness levels are important in the learning process. The relationships and connections between subjects are beneficial for the student in learning a mathematical concept or formula. The main objective of the teacher who has a facilitator role in teaching is problem-solving. Teaching is based on students' ideas and interests, and all instructional activities are performed by them. The facilitator teacher focuses on students' misunderstandings, defines new tasks for students to eliminate these misunderstandings, and creates tasks and questions that will allow students to conduct mathematical research (Kaleli-Yılmaz & Güven, 2014).

1.1.2. Example types

In addition to the definitions of the concepts, examples are special cases that explain the facts that do not belong to the concepts, expressing the meanings of mathematical rules and principles, or explaining how the procedures are applied to these cases (Alkan, 2016). They transform concepts that are abstract thoughts in our minds into a concrete structure and allow them to be understood better (Gökbulut, 2010). Besides, examples help to make the knowledge belonging to the concept more meaningful by making definitions more expressive, classifying mathematical expressions, and associating similar cases with each other (Watson & Mason, 2002a, Watson & Mason, 2002b). Examples can prevent possible misconceptions by providing a clearer understanding of the facts that do not belong to the concept. It can be difficult for a single example type always to express all the relevant concepts' meanings. When one example type is used to express what the definition of a concept means, another example type may be required to expand the definition's limits, or a different example type may be needed to clarify the concept's limits.

In summary, it can be said that the diversity of examples is important for the definition and rules of the concept to form a concrete structure in the learner's mind. In this context, examples serve different purposes according to their structures and functions (Alkan & Güven, 2018). Alkan (2016) stated that examples could be grouped under six different names according to their intended use: start-up, standard, improving, non-example, extreme, and counterexample. Accordingly, Alkan (2016) defined the example types as follows.

Start-up examples; Examples presented to draw students' attention to the relevant subject and remind them of their previous knowledge.

Standard examples; Prototype examples showing how a definition, rule, or operational process happens and what it means mathematically.

Improving examples; Examples used to expand the possible perception that standard examples create in students. They are presented to expand the boundaries of the concept in students by showing the relationship between subjects.

Extreme examples; Examples used to draw attention to the details of the concept and illustrate the concepts' exceptional cases.

Non-examples ; Examples used to express the cases that do not belong to the definition or rule.

C*ounterexamples:* Examples used to prevent students from reaching incorrect generalizations and thus clarify the subject's boundaries.

1.1.3. Purpose of the study

The research (Ernest, 1989; Klibanoff & Levine 2006, Philippou & Christou, 1999; Thompson, 1984) revealed that teachers' beliefs about mathematics, learning, and teaching mathematics shape their classroom practices. Therefore, it is necessary to determine teachers' beliefs first to understand teachers' in-class practices (Banks, 2005). If teachers' beliefs about mathematics are known, their way of presenting mathematical concepts and procedures in the classroom can be explained, and their teaching can be predicted (Helms, 1989). Thus, assumptions can be developed about how they might react to new mathematical understandings. One of the reasons behind the failure of many projects and innovations to improve education is ignoring the teacher's role in the teaching process (Baki & Gökçek, 2007). For the changes made in this context to be meaningful, teachers' beliefs in mathematics should be determined, and the necessary changes should occur (Baki, 2006; Baki & Gökçek, 2007). Therefore, in order for teacher education to be carried out healthily, it is necessary to correctly portray teachers' current roles.

Teachers' view of mathematics and its nature leads them to accept the new knowledge they encounter in a way that suits their perspective. It affects teachers' behavior and determines their role in the classroom. These roles may affect teachers' educational activities (explanations, examples, analogies used) in the classroom (Steinbring, 1998). In this case, information about teachers' roles (instructor, explainer, and facilitator) can be obtained by monitoring their behavior in the learning-teaching process. In this context, this study is thought to illustrate the teacher's role in the classroom with his/her explanations and examples. The literature review revealed studies on primary and secondary school teachers' beliefs and opinions (Baydar & Bulut, 2002; Bedel, 2008; Ernest, 1989; Kaleli- Yılmaz & Güven, 2014; Klibanoff & Levine 2006, Thompson, 1984). These studies are generally related to the teachers' beliefs about mathematics, mathematics learning, problem-solving, and the individual's beliefs in him/herself about mathematics and mathematics learning. Besides, some studies identify the example types used by mathematics teachers and examine the relationship between teachers' instructional explanations and example types (Alkan, 2016). However, no studies focus on the example types used by teachers who adopted different roles (instructor, explainer, and facilitator) in mathematics teaching. Therefore, the study aims to examine the roles of mathematics teachers in the mathematics teaching process and the example types they use. In this study, teachers' roles and the example types used by teachers who adopted a certain role will be addressed.

The case study approach was used to examine secondary mathematics teachers' roles in mathematics teaching and the example types they use in this process. The case study approach will allow obtaining in-depth information about the teachers' perspectives on mathematics and its nature, their explanations in the classroom, and their roles. Besides, detailed information about the example types that teachers use in their lessons can be collected. Since the study aims to describe and analyze a situation in detail within a certain time (Merriam, 2013), the case study approach was preferred. The study is qualified as a multi-case study (Gerring, 2007) because it includes more than one case. In this context, semi-structured interviews were conducted to determine the beliefs of 4 selected teachers about mathematics learning and teaching; each teacher's one-year education-training process was observed to illustrate the reflections of these beliefs in the classroom and to determine their roles and identify the example types they used during the teaching of the lesson.

2.1. Participants

The study was carried out with four mathematics teachers working in a high school in Trabzon. Being graduated from different faculties (Science and Literature/Education Faculty) were taken into consideration in selecting the teachers participating in the study. Besides, the diversity in the education levels of the teachers was also taken into consideration. Moreover, teachers' professional experiences and their voluntary participation were taken into account in this research. Mathematics teachers' education and professional experiences affect their perspective on the nature of mathematics and their beliefs (Lampert, 1990; Pajares, 1992; Raymond, 1997). Therefore, this factor affects the teachers' explanations in their lessons and the examples used in their explanations. Thus, attention has been paid to the educational background and professional experience of the teachers. Table 2 shows the demographic characteristics of the teachers.

Table 2. Demographic information of the participants

Participant	Gender	Undergraduate degree	Education level	Professional Experience (Year)
T1	F	Education Faculty	Undergraduate	21
T2	F	Education Faculty	Postgraduate	19
T3	F	Science and Literature Faculty	Undergraduate	16
T4	M	Science and Literature Faculty	Undergraduate	15

2.2. Data Collection Tools

The data collection tools used in the research process and the reasons for using these tools are shown in Table 3. Semi-structured interviews were used to collect information about teachers' views on mathematics and teaching mathematics. Mathematics teachers' beliefs, perspectives, and preferences for mathematics and teaching mathematics are effective in shaping their roles during teaching (Thompson, 1984; Erickson, 1993). Teachers' roles in the classroom and the examples used in their explanations can give messages about their mathematics perspective. Accordingly, some questions of "teachers' views and beliefs about the nature of mathematics" developed by Bütün (2005) were used, and teachers' opinions about mathematics and teaching mathematics were taken. In the study, the examples chosen by the teachers for their students, their behaviors, and explanations were observed in the lesson. Unusual situations were noted during the observations, and the participants were interviewed informally before and after the lesson in the teachers' room. In this way, information was obtained about their thoughts and about "why" they performed a certain thing. Especially at the end of the lesson, informal interviews were used to learn the purpose of the teachers' examples in the lesson.

Table 3. Data Collection Tools and Reasons for Use

Data Collection Tool	Reasons for Using Data Collection Tool
Semi-structured interviews	To take teachers' opinions about mathematics and teaching mathematics to be used in explaining their demographic characteristics
Unstructured observations	To identify the examples and explanations that teachers use in their lessons
Informal interviews	To get opinions about the examples teachers used in their lessons after the lesson.

2.3. Data Analysis

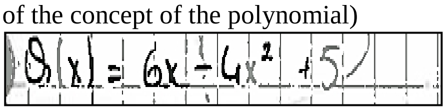
In the analysis of the data collected within the research, teachers' roles were identified first. The framework created by Ernest (1991) was used in the analysis of teachers' roles. The frequency of teachers' explanations was calculated according to these categories.

Table 4. Analysis of teachers' explanations

Teacher's Explanation	Analysis of Teacher's Explanation
Now, when drawing a parabola, if you write zero instead of x, you will find the point where the parabola intersects with the y-axis. If you give zero to y, you find the points where it intersects with the x-axis. Then kids, the vertex of the parabola is found. While finding the vertex, first the abscissa is found and then the ordinate. It would be better to find the abscissa first to find the ordinate. To find abscissa, we will apply the formula $-\frac{b}{2a}$*. The abscissa is also the axis of symmetry of the parabola. We will then write this down in the function and find the ordinate of the vertex. As I said, if a is positive, the arms of the parabola are up. In this case, the parabola gets the minimum value at the vertex. If a is negative, the parabola takes the maximum value. "*	The teacher was evaluated in the instructor role according to this explanation. Because in her explanation, she did not justify why the abscissa of the parabola's vertex was found by applying the formula $-\frac{b}{2a}$, she stated it directly. Besides, the teacher described how the parabola is drawn. However, since she did not explain these expressions' meaning to the students, she has been evaluated as an **instructor teacher**. It should be noted that teachers' explanations were not considered if they represent different categories of the same role.
"$a(x-r)^2$ *is the expression of the perfect square. The graphs of this expression show the shift of the* x^2 *parabola along the x-axis. For example, the graph of* $(x-2)^2$ *parabola is shifted to the right by two units, the graph of* $(x+1)^2$ *parabola is shifted to the left by 1 unit".*	Teacher T1 did not justify how this graph was drawn in her explanation and only intended to show how the procedure was applied; thus, she was considered to adopt an instructional role. On the other hand, since she explained what the rule means through examples, she has also been evaluated to adopt an explainer role.

The teachers' explanations were coded as described above, and the frequency of the codes was computed. The role of the teacher has been set regarding the category with the highest frequency. While determining teachers' role, their attitude towards students in the lesson and the teaching environment they prepared were also taken into account. After determining the teachers' roles, the example types they used in their lessons were analyzed according to the example classification developed by Alkan (2016). These analyzes were illustrated in Table 5.

Table 5. Analyzing the example types used by teachers

Examples	Example types
(Example used by teacher T3 to explain the definition of the concept of the polynomial)  (The reason why teacher T3 used this example in her lesson was asked at the end of the lesson.) The teacher expressed the purpose of using this example as follows: *"I have taught the definition of polynomial, and this is an example I have provided for that definition. I used this expression to point out, "this is the mathematical representation of the expression I told you."*	After explaining the definition of the polynomial to her students, Teacher T3 used algebraically representative examples to express what this definition means. Since the teacher wanted to express the definition of the polynomial algebraically with this example, it is considered a standard example.

Teachers' explanations and the example types used in these explanations are presented in the study's findings. For example, Teacher T1 said: *"For a second-degree equation, if one root is 2√3-1, the other root is 2√3 + 1. Remember the root-finding formula: the root is found from the formula minus b plus minus root delta divided by two. To write a second-degree equation whose roots are known, we need the sum and product of roots. Remember what we are doing while separating the second-degree equation into factors? The roots can also be written as (x-2√3-1).(x-2√3 + 1)". This example has been taken as an improving example. As the teacher explained the example's solution steps through justification, she was considered to have the explainer role.*

After the coding was completed, coding reliability was ensured by working with another researcher. In this process, the second researcher was informed about the examples to make the analysis more reliable. Observation notes of the teachers were given to the researcher. Upon completing the coding by different researchers, their codes were compared with the researcher's codes. The reliability formula suggested by Miles and Huberman

(1994) was used for calculating coding reliability: Reliability = Agreement / (Agreement + Disagreement). Accordingly, the reliability of the study was 0.82. Non-common codes were compared, and a consensus was achieved. Finally, the roles determined from the teachers' explanations and the example types used in these explanations were evaluated according to the results with the highest frequency.

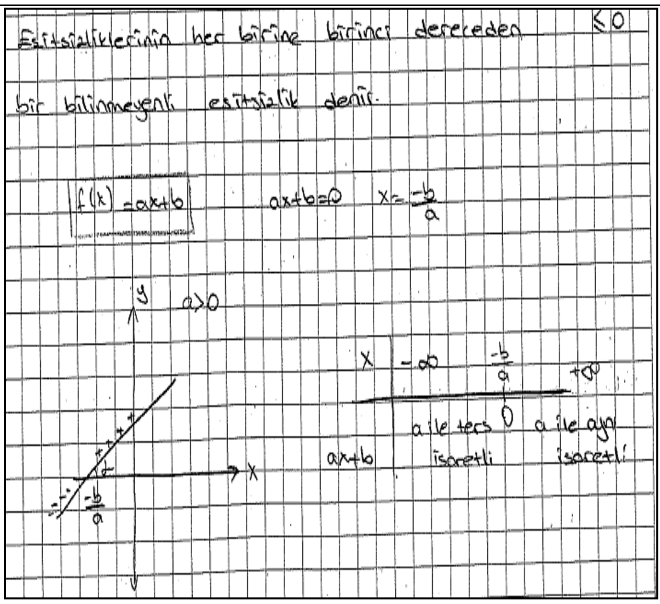
3. Findings

The study aimed to determine the roles of mathematics teachers in the classroom from their explanations they used in the mathematics lesson's teaching process. At the same time, it is aimed to determine the example types that teachers use in their explanations and to analyze their in-class roles and example types they use. The relationship between the roles derived from their explanations and the examples used in these explanations was determined using the frequencies. In the findings, the information about teachers' opinions about mathematics and mathematics teaching was first presented. Then the example types and their explanations they used in their lessons were given. Some important data of teachers T1, T2, T3, and T4, who participated in the study, are given in this part of the study.

In the interview with Teacher T1, the first question was, "*What is mathematics for you?*". Teacher T1 answered as "*mathematics is the art of thinking properly*." Teacher T1 then told that mathematics education improves students' interpretation and thinking skills. Mathematics education enables students to think more systematically, and mathematics is the art of proper thinking. She emphasized that conceptual knowledge is more important than operational knowledge in mathematics education. She stated that she make proofs in her lessons to explain where some rules came from. The proofs will improve student's mathematical thinking skills.

Regarding the examples in the lessons, she sometimes creates them herself, and sometimes she takes them from textbooks or question banks. She stated that the example selection might vary according to the structure and conditions of the class. Because new examples may be needed depending on the students' questions in the lesson or their explanations about the subject, she pays attention to selecting clear and understandable examples.

The observations' frequency showed that Teacher T1 adopted instructor and explainer roles in her courses, but she generally played an explainer role. Teacher T1 was observed to use start-up, standard, improving, non-example and extreme examples in her lessons, but she mostly employed improving examples. For example, Teacher T1 switched to second-degree inequalities after second-degree equations. She started the subject of inequality by explaining the definition of inequality with one variable:



Each inequality is called first-degree inequality with one variable.

Opposite sign with a

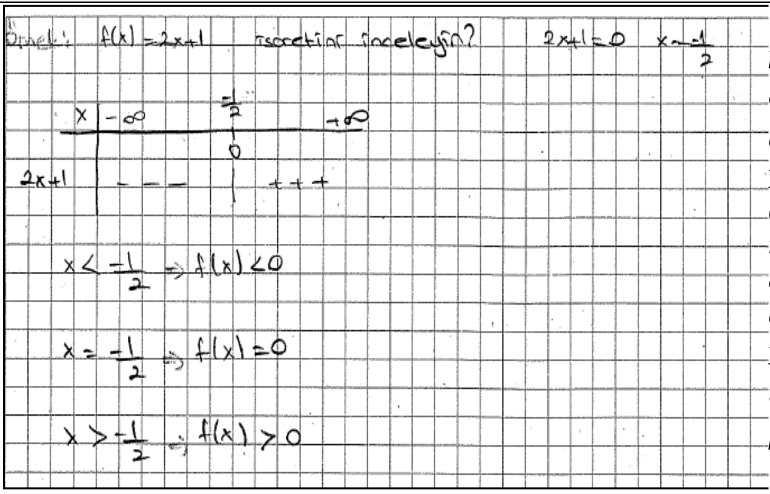
Same sign with a

The expressions such as ax+b≥0, ax+b>0, ax+b< 0 are called first-degree inequality with one variable, provided that a is not equal to zero. While solving inequalities, first find the root of the equation by equating the equation to zero. Now, children, what is the graph we would get if we plot this equation? (student: linear) Yes, a linear graph, so it is a line equation, lets' draw it. The root of the equation is $\frac{-b}{a}$ *Then what is the image under the x-axis? (student: less than 0) that is negative; the image at the upper part of the x-axis is then positive, i.e., greater than zero. If we show this in a table, the table starts with the sign of the coefficient "a"; when the root is reached, the sign changes, we get the opposite of the sign of "a." As a solution, we take the part that is asked.*

Figure 2. Teacher T1's explanation on inequalities

Teacher T1 explained what students should do to find the solution set of first-order inequalities, the solution steps, and the reasoning behind these. However, she explained the meaning of the inequality concept with the line graph and inequality table. She has been observed to explain the sign's change at the root in the table by associating it with the line graph. In addition to explaining the concept, the teacher also focused on solving inequalities and finding a solution set. Therefore, at this point, Teacher T1's explanations point out the explainer role.

After her explanation on the subject, Teacher T1 gave the start-up example in Figure 3 to her students:



Example: Work on the sign of f(x)= 2x+1

Now kids, what are we doing first? Did you find the root of the equation? Yes, the root is $\frac{-1}{2}$ *. Then draw the graph of this equation in your notebook before the table (teacher checks each student's notebook one by one). While making a table, we start with the sign of the coefficient of x. What is it? Look at your graph "+." When x is greater than* $\frac{-1}{2}$ *, the graph is at the upper part of the x-axis and positive. Therefore, we start with the sign of the largest term in the table, then when we come to the root, the sign changes to "-" Well now if we are asked the solution set of numbers less than zero, it is* $x<\frac{-1}{2}$*, f(x)<0, for* $x=\frac{-1}{2}$*, f(x)=0 and for* $x>\frac{-1}{2}$*, f(x) >0. (T1)*

Figure 3. Teacher T1's startup example for inequalities

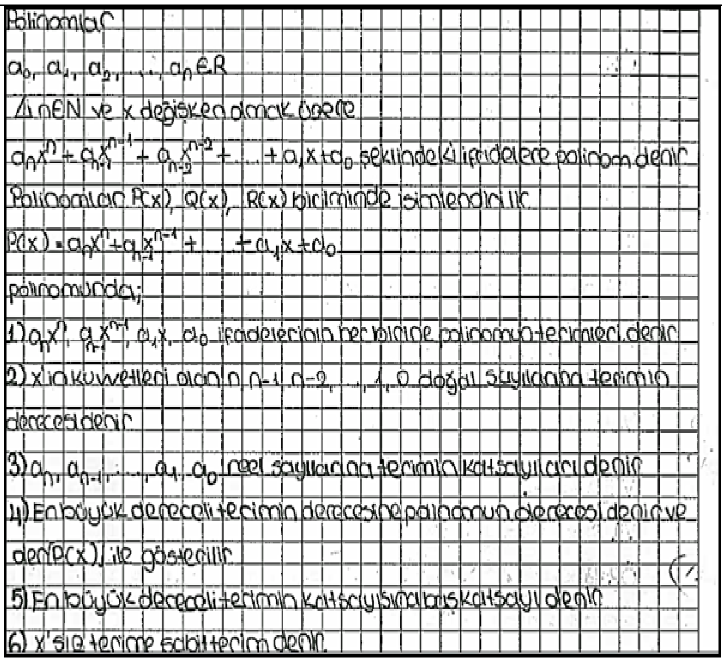
Teacher T1 explains how to find the solution set of a first-order inequality over a table, using the start-up example in Figure 3. Teacher T1's intended use of the example was asked at the end of the lesson, and she answered as follows:

"My students can draw the 2x + 1 function graph, so I wanted to show the sign-change by using their previous knowledge. Thus, I have explained how the sign changes before and after the root in the table. Based on this, I wanted to generalize this situation to the second-degree equations. They know how to draw the graph of a first-order equation since the 8th *grade. We already discussed it in the 9*th *grade."*

Teacher T1 addressed the sign-table on the graph using the student's knowledge of first-order equations. She used this example to show how to find the solution set of a second-degree inequality. Teacher T1 stated that, unlike last year, she explained simple inequalities to her students using the table method. Hence, she tried to prepare them for the new subject by expressing a concept that her students knew. Therefore, this example of Teacher T1 is evaluated as a start-up example. Besides, regarding the teacher's explanation and behaviors in the lesson, she explained what the sign change means with this example, and she explained how to apply the procedure with solution steps and justifications. Since the teacher explained why they start with the sign of variable x in the sign-table and why the sign is changed at the root, her role was taken as the explainer.

In the interview with Teacher T2, she answered the question, "*What is mathematics for you?*" as "correct interpretation." She said that mathematics education improves students' correct interpretation, processing, and problem-solving skills. Mathematics education improves students' ability to think properly, practice what they have learned in daily life, make interpretations, and give students different perspectives. Teacher T2 thinks that students' mathematical abilities are innate, and studying allows them only to reach a certain level. Although she said that conceptual knowledge is more important in mathematics education, she also emphasized that more exercises are needed to improve operational knowledge. She stated that she first makes the necessary proofs while teaching mathematics and then goes through the questions, from simple to difficult, by interpreting. She stated that she frequently uses examples involving association and interpretation in her lessons. She gets examples from specific sources as well as school textbooks. She said that the example selection might vary according to the structure and condition of the class.

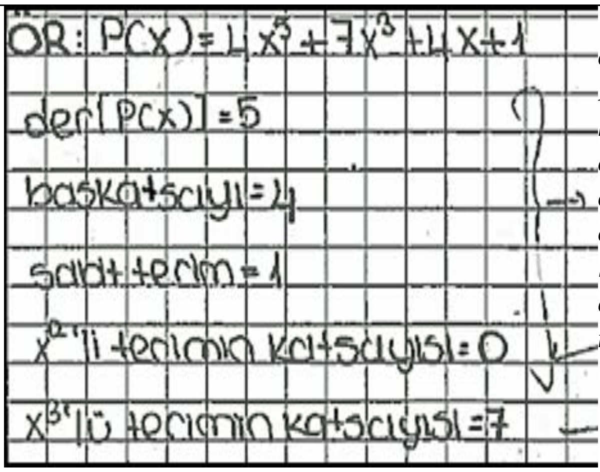
Teacher T2 has adopted both instructor and explainer roles in her lessons, but the instructor role overweights by one regarding the frequencies. Teacher T2 uses start-up, standard, improving, non-example and extreme examples in her lessons. She mostly uses standard and improving examples in her lessons; improving examples is higher with just one difference. For example, at the beginning of the polynomials subject, Teacher T2 told her students that polynomials are similar to functions, but functions are a broader subject. Teacher T2 then wrote the statement about polynomials in Figure 4 on the board and explained it as follows:



"The expressions given in this form are called polynomials provided that a_1, $a_2 .... a_n \in R$ and x's powers are natural numbers. The degree of a polynomial is the highest of the powers of the polynomial's monomials, and it is shown as deg P(x). The leading coefficient is the coefficient of the term with the highest power. The term without x is called the constant term."

Figure 4. Teacher T2's explanation on polynomial

Teacher T2 stated that in order for a mathematical expression to be a polynomial, its coefficients must be real numbers, and the powers of the variable x must be natural numbers. Only such expressions are called polynomials. On the other hand, Teacher T2 did not adequately explain the expressions such as coefficient, leading coefficient, degree of a polynomial, and constant term to her students. She did not explain what these expressions mean. Therefore, based on her explanations, Teacher T2 was considered as the instructor. Teacher T2 explained the meaning of the definitions she made to her students with the standard example in Figure 5.



"Kids, if you look at this mathematical expression that I wrote, it is a polynomial. Why? Because the powers of x are natural numbers. The highest degree of this polynomial is 5. The powers are 5,3,1, and the power of the constant is 0. We call this the degree of the polynomial. What is the coefficient of the highest degree? 4. This is the leading coefficient of the polynomial. The coefficient of the expression x^2 is 0 because we do not have such a term. The coefficient of x^3 is 7…."

Figure 5. Teacher T2's standard example for polynomials

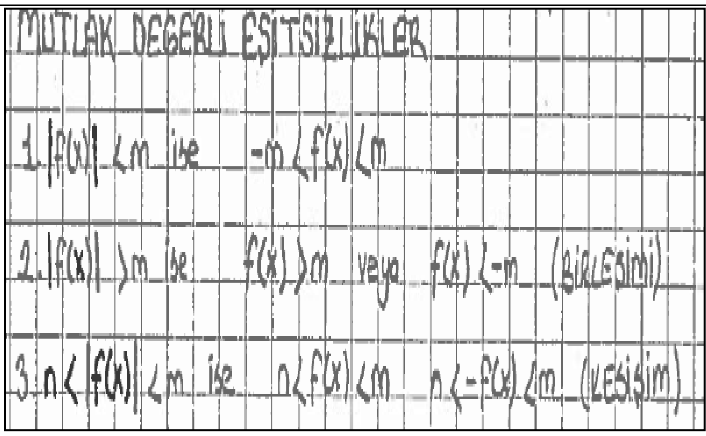
In the interview with Teacher T2 at the end of the lesson, she explained the purpose of using this example as follows:

"I wanted to express the definition of the polynomial to the students with this example. I also wanted to show the concepts such as leading coefficient, constant term, and degree of a polynomial expression. "

Teacher T2 explained the meanings of the concepts such as coefficient, leading coefficient, degree of the polynomial, and constant term one by one, asked the students why this expression is a polynomial and received feedback from them. This behavior of the teacher in the classroom was evaluated as the explainer role. Teacher T2 also emphasized the properties of the polynomial but did not explain why the degrees of the polynomial should be natural numbers. Therefore, this explanation of the teacher is considered as the instructor.

In the interview, teacher T3 answered the question "*What is mathematics for you?*" as "Being aware of the possibility of calculating next probabilities throughout life." She said that the student's failure in mathematics might be due to their irregular and undisciplined work and the lack of basic operational knowledge. Teacher T3 thinks that operational knowledge is more important in mathematics education. She stated that operational knowledge is especially important for the university entrance exam. Students need to know how to use the formulas, and they can learn the subject better by solving numerous questions. She stated that students could understand the subject better with examples rather than the meanings of the definitions and rules. She chose her examples from certain sources; she did not create them herself. She prefers examples ensuring the interconnection between subjects, including the elements in the definition, linked to past subjects, and making the student think. She also emphasized that her examples will not differ according to the characteristics of the class.

Teacher T3 was observed to adopt both instructor and explainer roles in her lessons, but generally, the instructor role was more dominant. Besides, Teacher T3 uses start-up, standard, improving, non-example and extreme examples in her lessons. From these example types, she mostly preferred standard examples. For example, Teacher T3 stated that inequality expressions could be associated with the absolute value, so she reminded some important information about the absolute value to her students as in Figure 6.

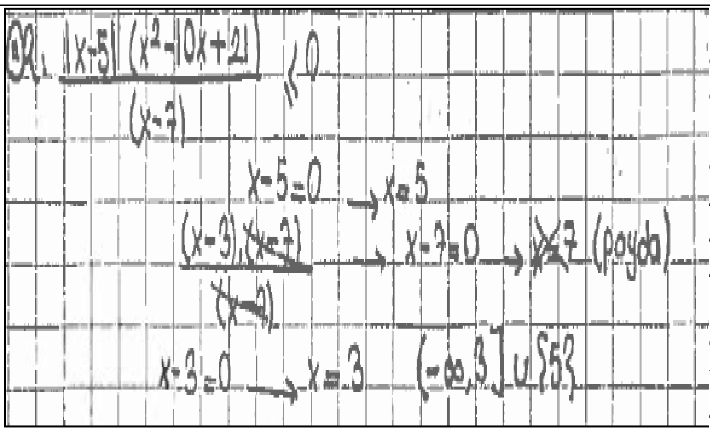


"In absolute value inequalities, if the absolute value of the function is less than m, the function is between -m and + m. What happens if the function's absolute value is greater than m? The function is either greater than m or less than -m. If the function's absolute value is between any two numbers, it will be between the positive and negative expression of these numbers."

Absolute Value Inequalities

Figure 6. Teacher T3's explanation on inequalities

Teacher T3 expresses the rules directly in her description; she does not inform students about the meaning of these rules and why they will be needed. Teacher T3 stated that her students learned these rules before, so she only reminded them. However, Teacher T3 was evaluated in the instructor role because she expressed the absolute value rules directly to her students without any justification. After this explanation, Teacher T3 presented the improving example in Figure 7 to show this case's relationship with the subject.



"Think of the absolute valued expression as a double root; its result is always positive. If you divide x^2-10x+21 into factors, it is reduced with the denominator. Since the expression should be less than or equal to zero, x-3 should be less than or equal to zero; the solution set is minus infinity to 3, including 3. However, 5 should be added to the solution set because the values making the results zero are should also be included in the solution set."

Figure 7. Teacher T3's improving example on inequalities

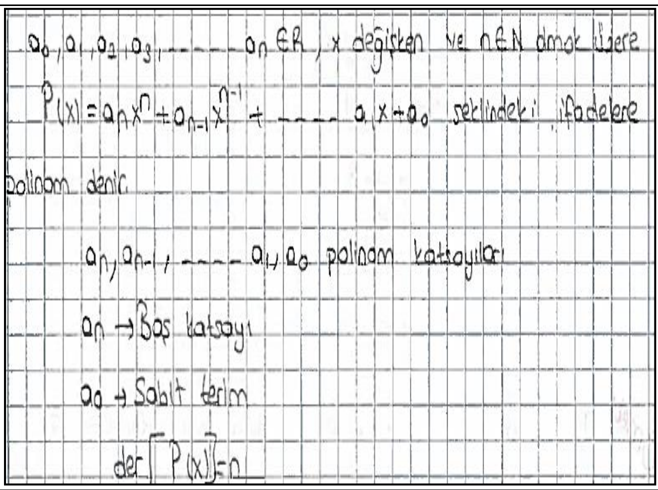
Teacher T3 stated the purpose of using this example as follows:

"My objective is to explain to students how to find the solution set of a new expression formed when an absolute value expression comes together with another mathematical expression."

Teacher T3 was observed to explain the solution steps with the improving example in Figure 7, in which she expressed how the procedure was applied, but she did not inform her students about the reasoning. For example, she never gave any explanation to her students about why an absolute valued expression should be treated as a double root. Therefore, this role of Teacher T3 in the classroom is considered as an instructor.

Teacher T4 answered the question "*What is mathematics for you?*" as "The *ability to perform four operations, to calculate*." The teacher defined mathematics as calculations and operations according to his explanation. Teacher T4 stated that operational knowledge is more important than conceptual knowledge in mathematics education because students will need operational knowledge more in the university exam. He stated that, in mathematics education, it is more important for students to know math knowledge usage rather than the definitions and rules. Students can be successful in mathematics by solving numerous questions and if they are interested in mathematics. He stated that students would grasp the subjects with plenty of questions and examples. Therefore, he uses examples to show how formulas are applied, reveals the interconnections between subjects, and shows definitions' properties. He made use of textbooks and special publications for his examples.

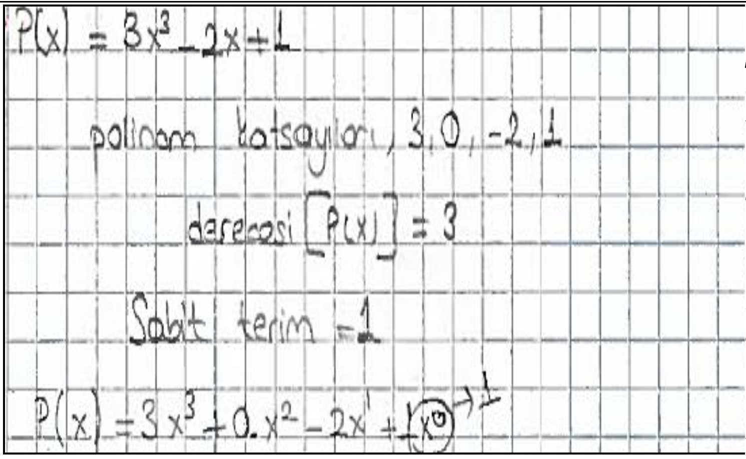
Teacher T4 played both instructor and explainer roles in the classroom, but he generally adopted the instructor's role according to the frequencies. Besides, Teacher T4 was observed to use start-up, standard, improving, non-example and extreme examples in his lessons. From these example types, he mostly included standard examples. The data regarding the teacher's role in the classroom were as follows. For example, while teaching polynomials, he started the lesson by expressing its definition. After writing the definition on the blackboard, Teacher T4 explained the coefficient, leading coefficient, constant term, and degree of the polynomial to the students as in Figure 8.



"Kids, this expression is called a polynomial provided that $a_0, a_1, a_2, ...a_n \in R$, and the powers of x are natural numbers. a_0, a_1, a_2, $...a_n$ are the coefficients of the polynomial. The highest power is the degree of the polynomial, and its coefficient is called the leading coefficient. The polynomial is similar to functions; only we will work with the expressions that possess these properties. Some operations will remind you of the functions.

Figure 8. Teacher T4's explanation on polynomials

Teacher T4 defined polynomials as the expressions whose powers are natural numbers and coefficients are real numbers. After this definition, he explained the degree of the polynomial and leading coefficient. Teacher T4 said that polynomials are similar to functions, but he did not explain the similarities or differences between them. Teacher T4 directly expressed this definition to his students and did not fully explain the meaning of the definition; therefore, he was observed to be in the instructor's role with his explanation. He used the standard example in Figure 9 for the definition of the polynomial and explained it as follows:



"The coefficients of this polynomial are 3, 0, -2, and 1. Here, 0 is the coefficient of the expression whose degree is 2. The degree of the terms of the polynomial goes in decreasing order. The coefficient of the missing degrees in this ranking, if any, is zero. You know, 3, the highest power constitutes the degree of the polynomial. The constant term is 1. Look, we said for the degree that it is in decreasing order, then what is the degree of the constant term? Yes, zero."

Figure 9. Teacher T4's standard example on the definition of the polynomial

Teacher T4 explained the degree, coefficients, and constant of the polynomial through the standard example in Figure 9. He explained the meaning of the definitions belonging to the polynomial concept (constant term, coefficients, and degree) using a standard example. Since teacher T4 explained the definitions involved in polynomials one by one over the example, he was considered to have the explainer role.

The data regarding the teachers' roles and the frequencies of the example types they use are presented in Table 4.

Table 4. The roles of mathematics teachers in the teaching process and the example types they use

Teachers	Teachers' Roles			Example types					
	Instructor	Explainer	Facilitator	Start-up example	Standard examples	Improving examples	Extreme example	Non-example	Counter example
T1	134	150	3	12	42	47	3	7	0
T2	135	134	0	12	43	44	2	3	0
T3	131	90	0	11	46	40	2	2	0
T4	155	76	0	9	52	31	2	2	0
Total	555	450	3	44	183	162	9	14	0

The frequencies of the teachers' roles in the classroom and the example types they used are displayed in Table 4. As shown in Table 4, only one of the teachers participating in the study was in the explainer role, and the roles of the other three teachers in the classroom were instructors. Besides, regarding teachers' examples in their lessons, improving and standard examples are used more frequently by the teachers, non-example and extreme examples are used rarely, and counterexamples are never used. Table 4 shows that the teacher who adopted the explainer role used improving examples more than standard examples. Besides, the teacher who is the explainer used non-examples more than the instructor teachers. Instructor teachers make more use of standard examples in their explanations throughout the lesson. The explanations of the teachers adopting the role of instructor and explainer are very similar to each other. The number of standard and improving examples used in these explanations is also very close to each other. Besides, none of the teachers, except T1, made any explanations belonging to the facilitator role. Teachers were also observed to fail to use some example types depending on the subjects. For example, teachers never used start-up examples and counterexamples on the polynomial; moreover, extreme, non-example, and counterexample were not used on the second-degree equation, inequality, and parabola.

4. Discussion and Results

It was concluded that mathematics teachers played instructor and explainer roles in the teaching process, and these roles did not change according to the subjects. Teachers playing the explainer role use the standard and improving examples more in their lessons. For example, Teacher T1, who plays the explainer role, uses improving examples more than other example types. Similarly, teachers playing the role of instructors use standard examples more than other example types in their explanations. Besides, the explainer teacher uses non-examples more than the instructor teachers. This fact has led to the idea that explainer teachers have a conceptual understanding of mathematical knowledge; they try to teach mathematical concepts, formulas, and operations in the best way (Thompson, 1992). Regarding the intended use of both improving and non-examples, improving examples aims to expand the concept's boundaries and draw attention to its details. For example, they reveal the relationship between the polynomial and the function or the relationship between a second-degree equation and parabola (Alkan, 2016; Alkan & Güven, 2018).

Similarly, non-examples are examples used to express the cases that fail to be an example of the concept (Alkan, 2016; Alkan & Güven, 2018; Tsamir, Tırosh, & Lewinski, 2008), in other words, to show when a polynomial is not a polynomial or the differences between the polynomial and the function concepts. Based on the example types that teachers use, it can be said that explainer teachers try to teach the subjects more comprehensively. In addition to the examples belonging to the concept, they provide more examples that do not belong to the concept, supporting this fact. The number of examples used by the teachers and the example types differs according to the subject. For example, Teacher T1, the only teacher in the role of explainer, included improving examples in her explanations about the second-degree equation, inequality, and parabola; similarly, Teachers T2 and T3 in the instructor role also included many improving examples in their explanations. In other words, although the roles of the teachers are different, they use the same types of examples. One of the reasons teachers use the same types of examples was thought to be the communication between teachers. In the interviews, teachers T1, T2, and T3 stated that they planned the course's instruction together and tried to include similar example types in their lessons.

Thus, teachers might have included more examples serving the same purpose in their lessons. However, although they used the same example type in their lessons, it can be said that teachers' knowledge and beliefs play a role in their instructional decisions (Ernest, 1989; Irez, 2007). Teachers' beliefs play a significant role in mathematical activities. As a result of the teachers' interviews, it was concluded that their perspective on mathematics affected their classroom behavior and the example types they used. For example, Teacher T1 stated that conceptual learning is important in mathematics. Accordingly, she was observed to bring conceptual learning to the fore in the example types she chose. Similarly, Teacher T4 emphasized that operations are more important for mathematics education and prioritized teaching the rules or procedures in the example types. Like this study, the literature (Stipek et al., 2001) also shows that teachers' value judgments and beliefs about teaching and learning affect their classroom practices.

Another important finding in the study is that none of the teachers used counterexample. The intended use of this example type is preventing students' mistakes and errors that may occur due to overgeneralization, and it is created in line with the student's questions. This lack of usage may result from our teachers having not adopted facilitator roles and generally play an instructor role. Facilitator teachers define new tasks in their lessons to clear students' misunderstandings and give them new responsibilities for learning mathematics. They also encourage students to come up with new ideas and thoughts. On the contrary, instructor teachers stated that they try to keep control in their lessons; thus, students were given less voice. NCTM (1991) standards suggest that teachers should stop controlling all aspects of their math activities, let students face their problems, and develop their strategies for better mathematical development. In this context, our teachers are recommended to prepare an environment where students can express their thoughts easily in their lessons.

5. Recommendations

Only one of the teachers is in the explainer role, and the others are in the instructor role. The lack of facilitator teachers in teacher roles is one of the important findings of the study. This is due to teachers' content knowledge, curricula knowledge, and sometimes their beliefs about teaching and learning mathematics. Therefore, it is recommended to encourage teachers in their in-service training to review their beliefs about learning and teaching mathematics and ensure that mathematics knowledge is taught according to the program's objectives. Besides, teachers' knowledge about example usage was found to be insufficient both in the literature and in the research. Considering that teachers' use of examples is important and that teachers' example choices are effective in students' learning, teachers can be informed about the importance of using different example types. It is recommended to integrate this information about examples and example types in the university to teacher candidates' field courses.

Hangi Öğretmen, Hangi Örnek Türü?

1. Giriş

Eğitim alanında yapılan çalışmaların önemli bir kısmını öğrenciler ve öğretmenlerin kişisel farklılıkları oluşturmaktadır. Özellikle öğretmenlerin kişisel farklılıklarına ait çalışmalarda, öğretmenlerin sahip oldukları öğrenme ve öğretmeye yönelik inançlar, öğretim ile ilgili problemlere çözüm bulma noktasında ilgi odaklarından birini oluşturmaktadır (Uysal ve Dede, 2019). 1984 yılında Thompson tarafından yapılan araştırmayla başlayan bu süreç, öğretmenlerin sahip oldukları inançları, bakış açıları ve tercihlerinin öğretim sırasındaki açıklamaları ile birlikte onların davranışlarını da şekillendirmede önemli bir yere sahip olduğunu göstermiştir. Öğrenme ortamlarında öğretmenlerin açıklamaları ve davranışlarında onların alan bilgilerinin yanı sıra sahip oldukları inançları da etkilidir (Erickson, 1993). Öğretmenlerin alan bilgileri ve inançları, onların öğretimsel kararlarında rol oynamakta ve sınıftaki davranışlarını etkilemekle birlikte onların sınıf içindeki rollerini oluşturmaktadır (Haser, Kaya, Işıksal- Bostan, 2013).

Matematik öğretmenleri öğrenme ve öğretmeye yönelik matematiksel inançlarına bağlı olarak aldıkları öğretimsel kararlarda öğretici, açıklayıcı ya da kolaylaştırıcı gibi roller benimseyebilir (Ernest, 1991). Bu rollerden öğretici role sahip öğretmenler, bir prosedürü uygulamak, bir materyali göstermek, açıklamak ve tanımlamak, onu en iyi şekilde sergilemeyi hedeflemektedir . Açıklayıcı öğretmenlerin rolü, matematiksel kavram, formül ve işlemleri en iyi şekilde öğrenciye kavratmaktır (Thompson, 1992). Kolaylaştırıcı öğretmenin rolü ise öğrencilerin yanlış anlamalarını dikkate alıp, öğrencilere bu yanlış anlamaları giderebilecekleri yeni görevler tanımlamak ve öğrencilerinin matematiksel araştırma yapmalarına fırsat verecek görevler ve sorular oluşturmaktır (Kaleli- Yılmaz ve Güven, 2011).

Öğretmenlerin sınıf içindeki rolleri, açıklamalarında kullandıkları gösterimleri, analojileri ve örnekleri öğrencilerine onların sahip oldukları matematik ve onun doğası hakkındaki bilgileriyle ilgili mesajlar verir (Mc Diamird, Ball ve Anderson, 1983). Bu durumda öğretmenlerin öğretim sürecinde kullandıkları örneklerin, matematiği öğretme bilgilerinin yanı sıra matematiğin doğası ile ilgili görüşleri ve anlayışları hakkında da bilgi verdiği söylenebilir. Örneklerin, öğretmenler ve öğrenciler arasında önemli bir iletişim aracı olduğu göz önünde bulundurulduğunda; öğretmenin herhangi bir konun kavranmasında kullandığı örnek türleri ve kullanılan örnek türlerinin sıklığı onun nasıl bir ders işlediği ile ilgili önemli açıklamalar sunabilir. Örneğin; bir öğretmenin öğrencilerinden bir önermenin karşıtının doğru olmayabileceğine yönelik karşıt örnek istemesi, konu hakkında öğrencilerini odaklamaya ve düşünmeye sevk ettiği anlamına gelebilir. Çünkü karşıt örnekler, öğrencilerin herhangi bir durumda aşırı genellemelerini ya da yanlış, eksik düşünmelerini ortadan kaldırmak için kullanılmaktadır. Bu durumda öğretmenin diğer davranışları da göz önünde bulundurularak kolaylaştırıcı bir öğretmen olup olmadığı değerlendirilebilir. Alkan (2016) yapmış olduğu çalışmasında matematik öğretmenlerinin kullandıkları örnek türleri ile onların öğretimsel açıklama boyutlarını incelemiş ve öğretimsel açıklama boyutları ile öğretmenlerin derslerinde tercih ettikleri örnek türleri arasında bir ilişki olduğunu tespit etmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin sınıf içinde öğrencileri ile iletişim kurduğu birincil araçlardan birinin onların açıklamalarında kullanmış oldukları örnekler olduğu tespit edilmiştir. Bu bağlamda öğretmenlerin kullandıkları örneklerin onların inançlarının, öğretimsel açıklama boyutlarının başka bir ifade ile onların sınıf içindeki rollerinin birer somut yansıması olduğu söylenebilir.

1.1. Kuramsal Çerçeve

1.1.1. Öğretmen rolleri

Öğretmenlerin matematik öğrenme ve öğretmeye yönelik inançlarının öğretmenlerin pratik uygulamalarına yansımalarını olduğunu belirten Ernest (1991), bu yansımanın üç farklı öğretmen rolü oluşturduğunu belirmiştir: (instructor), açıklayıcı (explainer) ve kolaylaştırıcı (facilitator). Öğretici rolündeki öğretmen materyali gösterme, tanıtma, açıklama ve sergileme görevini üstlenirken, açıklayıcı öğretmen öğretim faaliyetlerinde matematik içeriğine odaklanır, matematiksel kavram, formül ve işlemleri en iyi şekilde kavratmaya çalışır. Kolaylaştırıcı rolündeki öğretmen ise problem çözmeye odaklanır ve öğrencilerin fikirlerine, ilgilerine önem vererek, öğrencilerin matematiksel araştırma yapmalarına imkân tanıyan öğrenme ortamları oluşturur (Thompson,1992; Bütün, 2005; Bütün, 2012).

Aşağıdaki tabloda Ernest'ın (1991) öğretmeye yönelik inanç modelleri ele alınarak öğretici, açıklayıcı ve kolaylaştırıcı rollerindeki öğretmenlerin sahip olması gereken özelliklere ilişkin göstergeler oluşturulmuştur.

Tablo 1. Öğretmenlerin rolleri ve özellikleri

Öğretmen rolü	Öğretmen
Öğretici	• İşlemleri ve prosedürleri ön planda tutar • Matematiksel sembollerin ustalıkla kullanılmasını vurgular • Ders sürecinde bir materyali öğrencilerin sonuç çıkarmaları için değil bir algoritmayı göstermek için kullanır • Tekrarlar ders içinde önemli bir yer tutar • Geri bildirimler doğru ya da yanlış şeklindedir. Gerekli durumlarda işlemler veya tekrarlar yeniden anlatılır
Açıklayıcı	• Dersi öğrencilere kavramsal bir yaklaşımla sunar • Matematiksel kavram, formül ve işlemleri bol açıklamalarla en iyi şekilde kavratır • Geri bildirimleri öğrencinin yanlış anlamasının olası sebeplerini açıklayan ipuçlarını doğrudan verir • Materyaller kavramsal anlama için öğretmenin açıklamaları eşliğinde kullanılır
Kolaylaştırıcı	• Problem çözme ortamlarında matematik öğretimini sürdürür • Etkinlikler boyunca keşfedici bir yaklaşım esas alınır • Öğrencilerin ilgileri ve günlük faaliyetleri etkinlik tasarımlarında dikkate alınır • Öğrencilerin yanlış anlamalarını gidermek için yanlış anlamalarını giderebilecekleri yeni görevler tanımlanır • Öğrencilere matematik öğrenmelerine yönelik görev ve sorumluluklar verir

Tablo 1'den de anlaşılacağı üzere öğretici rolündeki bir öğretmenin asıl amacı prosedürleri ustalıkla uygulamaktır. Öğretmen öğrenme ortamında daha çok işlemleri ve prosedürleri uygulamaya yönelik becerileri ön planda tutar. Öğrencilerin hataları öğretmenler için pek önemli değildir. Bu yüzden geri bildirimlere öğrenme ortamlarında yer vermez (Kaleli- Yılmaz ve Güven, 2011). Öğretici rolündeki öğretmenlerin derslerinde tekrara daha çok önem verdikleri söylenebilir. Açıklayıcı role sahip öğretmenler ise matematiksel bilgide kavramsal anlayışa sahiptirler. Öğretmen, öğrenme ortamlarında sundukları açıklamalarında konunun içeriğine daha çok odaklanır. Öğretmenin asıl amacı matematiksel kavram, formül ve işlemleri en iyi şekilde öğrenciye kavratmaktır (Thompson, 1992). Bu yüzden öğrenme sürecinde öğrencilerin hazırbulunuşluk düzeyleri önemlidir. Konular arası ilişkiler ve bağlantılar, matematiksel bir kavramın veya formülün öğretilmesinde öğrenci için faydalı görülmektedir. Kolaylaştırıcı role sahip öğretmenin ise öğretimde asıl amacı problem çözmedir. Öğretim öğrencilerin fikirlerine ve ilgilerine dayanmakla birlikte öğretimsel bütün aktiviteleri öğrenciler gerçekleştirir. Kolaylaştırıcı rolündeki öğretmen, öğrencilerin yanlış anlamalarını dikkate alır, öğrencilere bu yanlış anlamaları giderebilecekleri yeni görevler tanımlar ve öğrencilerinin matematiksel araştırma yapmalarına fırsat verecek görevler ve sorular oluşturur (Kaleli- Yılmaz ve Güven, 2011).

1.1.2. Örnek türleri

Örnek, kavramlara ait tanımların yanı sıra kavramlara ait olmayan durumların açıklanması, matematiksel kuralların ve ilkelerin anlamlarının ifade edilmesi veya bu durumlara ait prosedürlerin nasıl uygulandığına dair açıklamaların yapılmasında kullanılan özel durumlardır (Alkan, 2016) Zihnimizde soyut birer düşünce olan kavramları somut bir yapıya dönüştürerek, daha iyi anlaşılmasını sağlar (Gökbulut, 2010). Bunun yanı sıra örnekler, tanımların daha anlamlı hale gelmesini, matematiksel ifadelerin sınıflandırılmasını ve birbiriyle olan benzer durumlarının ilişkilendirilmesini sağlayarak (Watson & Mason, 2002) kavrama ait bilgilerinin daha anlamlı olmasına yardımcı olur. Örnekler kavrama ait olmayan durumların daha net anlaşılmasını sağlayarak olası kavram yanılgılarını engelleyebilir. Tek bir örnek türünün her zaman ilgili kavrama ait bütün anlamları ifade etmesi zor olabilir. Herhangi bir kavrama ait tanımın ne anlama geldiğini basitçe ifade etmek için bir örnek türü kullanılırken tanımın sınırlarını genişletmek için başka bir örnek türüne, hatta kavramın sınırlarını net olarak belirleyebilmek içinde farklı bir örnek türüne gerekli olabilir. Özetle, örneklerin çeşitliliğinin kavrama ait tanım ve kuralların öğrenenin zihninde somut bir yapı oluşturması bakımından önemli olduğu söylenebilir. Bu bağlamda örnekler, yapılarına ve işlevlerine göre farklı amaçlara hizmet etiği ifade edilebilir (Alkan ve Güven, 2018). Alkan (2016) örnekleri kullanım amaçlarına göre başlangıç, standart, geliştirici, örnek dışı, uç ve karşıt örnekler olmak üzere altı farklı isim altında toplanabileceğini ifade etmiştir. Bu doğrultuda Alkan (2016) *başlangıç örnekleri*; öğrencilerin ilgilili konuya dikkatlerini çekmek, onların eski bilgilerini hatırlatmak amacıyla sunulan örnekler olarak tanımlamıştır. *Standart örnekleri*; bir tanımın, kuralın veya *işlemsel bir sürecin basitçe nasıl gerçekleştiğini* matematiksel olarak ne ifade ettiğini gösteren prototip örnekler olarak ifade etmiştir. Bunun yanı sıra *geliştirici örnekleri ise*; standart örneklerin öğrencilerde oluşturduğu muhtemel algıyı genişletmek için kullanılan örnekler olarak tanımlamıştır. Konular arası ilişkiyi göstererek öğrencilerde kavramın sınırlarını genişletmek amacıyla sunulan örnekler olduğunu vurgulamıştır. *Uç örnekleri*; kavrama ait ayrıntılara dikkat çekmek, kavramlara ait istisna durumları örneklendirmek amacıyla kullanılan örnekler olarak ifade ederken *örnek dışı* örnekleri de; tanıma veya kurala ait olamayan durumları ifade etmek için kullanılan örnekler olarak tanımlamıştır. Son olarak *karşıt örnekleri* ise, öğrencilerin yanlış genellemelere ulaşmasını engellemek ve buna bağlı olarak konunun sınırlarının netleşmesini sağlamak için kullanılan örnekler olarak ifade etmiştir.

1.1.3. Araştırmanın amacı

Öğretmenlerin matematiğin doğasına, matematiği öğrenme ve öğretmeye yönelik inançlarının öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarını şekillendirdiği yapılan araştırmalarla (Ernest, 1989; Klibanoff & Levine 2006, Philippou ve Christou, 1999; Thompson, 1984) ortaya konulmuştur. Bu nedenle öğretmenlerin sınıf içi pratiklerini anlamak için öncelikle öğretmenlerin inançlarını belirlemek gerekmektedir (Banks, 2005). Öğretmenlerin matematik hakkındaki inançlarının bilinmesi durumunda onların sınıf ortamında matematiksel kavramları ve prosedürleri nasıl sunduklarına ilişkin bir açıklama getirilebileceği ve nasıl bir öğretim yapabileceklerine dair tahminlerde bulunulabilir (Helms, 1989). Böylelikle onların matematikle ilgili yeni anlayışlara ne gibi tepkiler gösterebileceklerine yönelik varsayımlar geliştirilebilir. Eğitimi geliştirmeye yönelik yapılan birçok proje ve yeniliklerin başarısız olma sebeplerinden birinin öğretmenin öğretim sürecindeki rolünün göz ardı edilmesidir (Baki, 2006). Bu bağlamda yapılan değişikliklerin anlamlı olabilmesi için özellikle öğretmenlerin matematiğe olan inançlarının belirlenmesi ve buna yönelik gerekli değişimlerin yapılaması ile mümkündür (Baki, 2006). O halde öğretmen eğitiminin sağlıklı bir şekilde yapılabilmesi için öncelikle öğretmenlerin mevcut rollerinin doğru bir şekilde resmedilmesi gerekmektedir.

Öğretmenlerin matematiğe ve onun doğasına bakış açıları onların karşılaştıkları yeni bilgileri bu sahip oldukları bakış açılarına uyacak şekilde kabul etmelerine yol açar. Bu durum öğretmenlerin davranışlarını etkiler ve onlara sınıf içinde bir rollerini belirler. Bu roller öğretmenlerin sınıf içindeki eğitim aktivitelerini (açıklamaları, örnekleri, kullanılan analojileri…) etkileyebilir (Steinbring, 1998). Bu durumda öğretmenlerin öğrenme- öğretme sürecindeki davranışlarına bakarak onların rolleri (öğretici, açıklayıcı ve kolaylaştırıcı) hakkında bilgiler edinilebilir. Bu bağlamda bu çalışmada Öğretmenin sınıf içindeki rolünün onun açıklamalarını, onun kullandığı örneklerle birlikte resmedilebileceği düşünülmektedir. Yapılan araştırmalar incelendiğinde; ilköğretim ve ortaöğretim öğretmenlerinin inanç ve düşünceleriyle ilgili çalışmaların (Baydar ve Bulut, 2002; Bedel, 2008; Ernest, 1989; Kaleli- Yılmaz ve Güven, 2011; Klibanoff & Levine 2006, Thompson, 1984) olduğu görülmüştür. Bu çalışmalar incelendiğinde genelde çalışmaların matematik, matematik öğrenme ve problem çözme hakkındaki inançları ile birlikte matematik ile ilgili bireyin kendisi hakkındaki inançları ve matematik öğrenme hakkındaki inançları ile ilgili olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra matematik öğretmenlerinin kullandıkları örnek türlerini tespit etme ve öğretmenlerin öğretimsel açıklamaları ile ilgili kullandığı örnek türleri arasındaki ilişkiyi inceleyen çalışmalarında (Alkan, 2016) yer aldığı tespit edilmiştir. Bu çalışmalar incelendiğinde matematik öğretimi esnasında çeşitli rollere sahip olan (öğretici, açıklayıcı ve kolaylaştırıcı) öğretmenlerin derslerinde kullandıkları örnek türlerini tespit etmeye yönelik çalışmalara rastlanılmamıştır. Tüm bunlardan hareketle matematik öğretmenlerinin matematik öğretimi sürecindeki rolleri ile bu süreçte yararlandıkları örnek türlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu çalışma ile öğretmen rolleri ile bu rollere sahip öğretmenlerin kullandıkları örnek türleri resmedilecektir.

2. Yöntem

Orta öğretim matematik öğretmenlerinin matematik öğretimi sürecindeki rolleri ile bu süreçte yararlandıkları örnek türlerinin incelenmesini amaçlayan bu çalışmada özel durum çalışması kullanılmıştır. Özel durum çalışması ile öğretmenlerin matematiğe ve onun doğasına bakış açıları, sınıf içindeki açıklamaları ile birlikte öğretmen rolleri hakkında derinlemesine bilgi elde edilebilecektir. Ayrıca öğretmenlerin derslerinde ne tür örneklere yer verdikleriyle ilgili detaylı bilgiler toplanabilecektir. Çalışmanın amacı bir durumun belirli bir zaman diliminde detaylı bir şekilde betimlenmesi ve incelemesinden (Merriam, 2013) dolayı durum çalışması yöntemi tercih edilmiştir. Çalışmada birden fazla durum içermesinden dolayı çoklu durum çalışması (Gerring, 2007) olarak nitelendirilmektedir. Bu kapsamda seçilen 5 öğretmenin matematik öğrenme ve öğretmeye yönelik inançlarını belirlemek için yarı yapılandırılmış mülakatlar yürütülmüş, bu inançların sınıf içi yansımalarını resmetmek rollerini belirlemek ve dersin öğretimi esnasında kullandıkları örnek türlerini tespit etmek için her birinin bir yıllık eğitim -öğretim süreci gözlenmiştir.

2.1. Katılımcılar

Araştırma Trabzon ilinde yer alan bir lisede görev yapmakta olan 4 matematik öğretmeni ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin belirlenmesinde farklı fakülte mezunu olmalarına (Fen Edebiyat/ Eğitim Fakültesi) dikkat edilmiştir. Bunun yanı sıra öğretmenlerin eğitim düzeylerindeki çeşitlilik de göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca araştırmaya katılacak olan öğretmenlerin mesleki deneyimleri ve bu araştırmaya gönüllü olarak katılmalarına da dikkat edilmiştir. Matematik öğretmenlerinin aldıkları eğitim ve mesleki tecrübelerinin onların matematiğin doğasına bakış açısını ve inanışlarını etkilemektedir (Lampert, 1990; Pajares, 1992; Raymond, 1997). Dolayısıyla bu durumunda öğretmenlerin derslerindeki açıklamalarını, açıklamalarında kullandığı örnekleri etkilemektedir. Bu sebeplerden ötürü öğretmenlerin eğitim durumları ve mesleki tecrübelerine dikkat edilmiştir. Tablo 2'de öğretmenlerin demografik özelliklerine yer verilmiştir.

Tablo 2. Araştırmanın katılımcılarına ait demografik bilgiler

Katılımcılar	Cinsiyet	Lisans Mezuniyeti	Eğitim Düzeyi	Mesleki Deneyim Yılı
Ö1	K	Eğitim Fakültesi	Lisans	21
Ö2	K	Eğitim Fakültesi	Yüksek Lisans	19
Ö3	K	Fen Edebiyat Fakültesi	Lisans	16
Ö4	E	Fen Edebiyat Fakültesi	Lisans	15

2.2. Veri Toplama Araçları

Araştırma sürecinde kullanılan veri toplama araçları ve bu araçların kullanılma nedenlerine ilişkin bilgiler Tablo 3' de yer almaktadır. Öğretmenlerin matematik ve matematik öğretmeye yönelik görüşleri hakkında bilgi sahibi olmak için yarı yapılandırılmış mülakat tekniğinden yararlanılmıştır. Matematik öğretmenlerinin sahip oldukları matematik ve matematik öğretmeye yönelik inançları, bakış açıları ve tercihleri onların öğretim sırasındaki rollerini şekillendirmede etkilidir (Thompson, 1984; Erickson, 1993). Öğretmenlerin sınıf içindeki rolleri, açıklamalarında kullandıkları örnekleri öğrencilerine onların matematiğe bakış açılarıyla ilgili mesajlar verebilmektedir. Bu doğrultuda Bütün (2005) tarafından geliştirilen "öğretmenlerin matematiğin doğasına bakışları ve inançları" ile ilgili soruların bir kısmından yararlanılmış ve öğretmenlerin matematik ve matematik öğretmeye yönelik görüşleri alınmıştır. Çalışmada öğretmenlerin öğrencileri için seçtikleri örnekler, davranışları ve açıklamaları, ders ortamında gözlenmiştir. Gözlemler sırasında dikkat çeken durumlar not edilerek ders öncesinde ve sonrasında, öğretmenler odasında informal olarak katılımcılarla görüşülmüştür. Bu şekilde 'neyi' 'neden' yaptıkları ile ilgili düşünceleri hakkında bilgi edinilmiştir. Özellikle ders bitiminde öğretmenlerin derste kullandıkları örneklerin amacını öğrenmek için informal mülakatlardan yararlanılmıştır.

Tablo 3. Veri Toplama Araçları ve Kullanılma Nedenleri

Veri Toplama Araçları	**Veri Toplama Aracının Kullanılma Nedenleri**
Yarı yapılandırılmış mülakatlar	Öğretmenlerin demografik özelliklerini açıklamak için matematik ve matematik öğretmeye yönelik görüş almak
Yapılandırılmamış gözlemler	Öğretmenlerin derslerinde kullandıkları örneklerin ve açıklamaların neler olduğunu tespit etmek
İnformal mülakatlar	Öğretmenlerin ders sonrası, derslerinde kullandıkları örneklere ilişkin görüş almak

2.3. Verilerin Analizi

Araştırma kapsamında toplanan verilerin analizinde önce öğretmen rolleri belirlenmiştir. Öğretmenlerin rollerinin analizinde ise Ernest (1991) tarafından oluşturulan çatıya göre analiz yapılmıştır. Öğretmenlerin açıklamaları bu kategorilere göre frekanslandırılmıştır.

Tablo 4. Öğretmenlerin açıklamalarının analizi

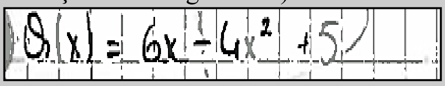
Öğretmenin Açıklaması	**Öğretmenin Açıklamasına Yönelik Yapılan Analiz**
"Şimdi bir parabolü çizerken öncelikle x yerine sıfır yazarsanız parabolün y ekseninde kestiği noktayı bulursunuz. Eğer y eksenini sıfır verirseniz x eksenini kestiği noktaları bulursunuz. Daha sonra çocuklar parabolün tepe noktası bulunur. Tepe noktası bulunurken önce apsisi bulunur daha sonra ordinatı bulunur. Ordinatı bulmak için öncelikle apsisi bulmak daha iyi olur. Apsisi bulurken $-\frac{b}{2a}$ *formülünü uygulayacağız. Apsis aynı zamanda parabolün simetri eksenidir. Daha sonra bunu getirip fonksiyonda yerine yazıp tepe noktasının ordinatını bulacağız. Dediğim gibi eğer a sıfırdan büyük ise parabolün kollar yukarı doğru olur. Bu durumda parabol en küçük değerini alır. Şayet a sayısı sıfırdan küçük ise parabol en büyük değerini alır."*	Öğretmenin bu açıklamasına göre öğretici rolde değerlendirilmiştir. Çünkü öğretmenin açıklamalarında, parabolün tepe noktasının apsisinin neden " $-\frac{b}{2a}$ " formülüne göre bulunduğunu öğrencilerine gerekçelendirmemiş, doğrudan ifade etmiştir. Bunun yanı sıra öğretmenin parabolün grafiğinin nasıl çizildiğini de ifade ettiği fakat bu ifadelerinin ne anlama geldiğini öğrencilerine açıklamamasından dolayı bu açıklaması da **öğretici rol** olarak değerlendirilmiştir. Bunu yanı sıra öğretmenlerin açıklamaları sadece aynı rolün farklı kategorilerini sağlaması durumunda değerlendirilmemiştir.

Tablo 4'ün devamı

"a(x-r)^2 bu ifade tam kare ifadesi bu da aslında x^2 parabolünün x ekseni boyunca ötelenmesi sonucu oluşan grafiklerdir. Mesela (x-2)^2 parabolünün grafiği 2 birim sağa ötelenmesi (x+1)^2 parabolünün grafiği ise 1 birim sola ötelenme grafiğidir."	Ö1 öğretmeninin açıklamasında bu grafiğin nasıl çizildiğini gerekçelendirmemesi ve sadece prosedürün nasıl uygulandığını göstermeye yönelik olmasından dolayı öğretimsel rol olarak değerlendirilirken öte yandan kuralın ne anlam ifade ettiğini örnekler aracılığıyla açıklamasından dolayı, açıklayıcı rol olarak da değerlendirilmiştir.

Öğretmenlerin açıklamaları yukarıda açıklandığı şekilde kodlanmış ve kodlara göre frekanslandırma yapılmıştır. En fazla frekans değeri hangi kategoriye ait ise öğretmenin rolü ona göre tespit edilmiştir. Öğretmenin rolünün tespit edilmesinde derste öğrencilerine karşı nasıl bir tutum içinde olduğu ve nasıl bir öğretme ortamı hazırladığı da dikkate alınmıştır. Öğretmenlerin rollerinin tespit edilmesinden sonra derslerinde kullandıkları örnek türleri belirlenmiştir. Kullanılan örnek türlerinin analizi Alkan (2016) tarafından geliştirilmiş olan örnek sınıflandırılmasına göre yapılmıştır. Bu analizler Tablo 5'deki gibi yapılmıştır.

Tablo 5. Öğretmenlerin kullandıkları örnek türlerinin analiz edilmesi

Örnekler	**Örnek Türleri**
(Ö3 öğretmeni polinom kavramının tanımını açıklamak için kullandığı örnek)  (Ö3 öğretmeninin bu örneği neden dersinde kullandığı ders bitiminde sorulmuştur.) Öğretmen bu örneği kullanım amacını şu şekilde ifade etmiştir: *"Polinomun tanımını verdim ve bu da o tanıma uygun sunduğum bir örnek. Bakın bu ifade benim size anlatmak istediğim ifadenin matematiksel temsili demek için kullandım."*	Ö3 öğretmeni, öğrencilerine polinom kavramının tanımını açıkladıktan sonra bu tanımın ne anlama geldiğini ifade etmek için cebirsel olarak temsil eden örneklerden yararlanmıştır. Öğretmenin bu örneği polinomun tanımını cebirsel olarak ifade etmek istemesinden dolayı standart örnek olarak değerlendirilmiştir.

Bunun yanı sıra öğretmenlerin açıklamaları ve bu açıklamalarda kullandığı örnek türleri birlikte araştırmanın bulguları kısmında şu şekilde sunulmuştur. Örneğin; Ö1 öğretmeni *" Köklerinden biri 2$\sqrt{3}$-1 olan ikinci dereceden bir denklemin diğer kökü 2$\sqrt{3}$+1 dir. Onun eşleniğidir. Çünkü köklerin bulunuş formülünü hatırlarsanız eksi b artı eksi kök delta bölü iki a formülünde gelmektedir. Kökleri bilinen ikinci dereceden bir denklemi yazarken kökler toplamı ve çarpımına ihtiyacımız vardır. Çünkü ikinci dereceden bir denklemin çarpanlarını ayırırken ne yapıyorduk?...kökler (x-2$\sqrt{3}$-1).(x-2$\sqrt{3}$+1) burdan da yazılabilir...."* şeklindeki ifadesinde kullandığı örneği; geliştirici bir örnek ve aynı zamanda öğretmenin örneğin çözüm adımlarını gerekçeleri ile birlikte açıklaması ise açıklayıcı rol olarak değerlendirilmiştir.

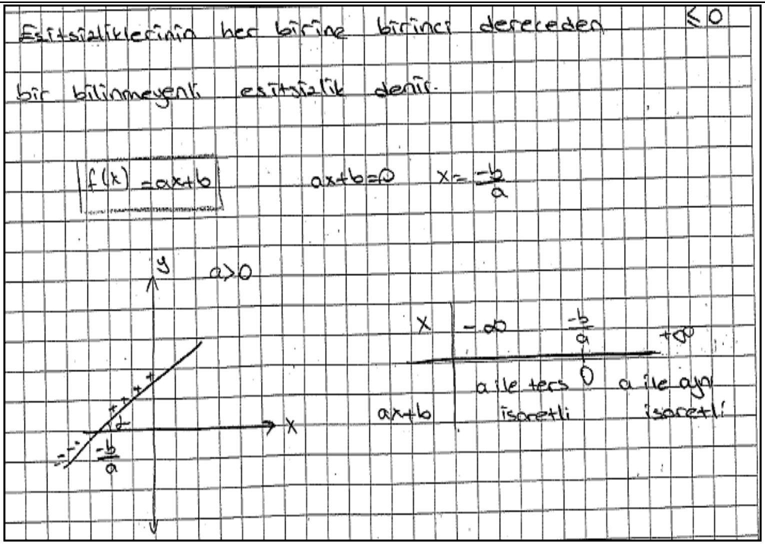
Kodlamalar tamamlandıktan sonra başka bir araştırmacıyla kodlama güvenirliği sağlanmıştır. Bu süreçte analizlerin daha güvenilir olarak yapılabilmesi için araştırmacıya örnekler ile ilgili bilgilendirme yapılmıştır. Araştırmacıya öğretmenlerin gözlem notları verilmiştir. Farklı araştırmacının kodlamaları tamamlaması üzerine araştırmacıyla kodlamaları kıyaslanmıştır. Kodlama güvenirlik hesaplaması için Miles ve Huberman'ın (1994) önerdiği güvenirlik formülü (Güvenirlik = Görüş Birliği/ (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)) kullanılmıştır. Buna göre araştırmanın güvenirlik yüzdesi 0,82 elde edilmiştir. Ortak olmayan kodlamalar karşılaştırılmış ve fikir birliği sağlanmıştır. Son olarak; öğretmenlerin açıklamaları ile tespit edilen roller ve bu açıklamalarda kullandığı örnek türlerinin belirlenmesi frekansça en fazla olan sonuçlara göre değerlendirilmiştir.

3. Bulgular

Çalışma ile matematik öğretmenlerinin matematik dersinin öğretimi sürecindeki açıklamalarından onların sınıf içindeki rolleri tespit edilmek istenmiştir. Aynı zamanda öğretmenlerin açıklamalarından kullandıkları örnek türleri de tespit edilerek onların sınıf içi rolleri ile kullandıkları örnek türlerinin incelenmesi hedeflenmiştir. Öğretmenlerin açıklamaları ile tespit edilen rolleri ve bu açıklamalarda kullandığı örnekler arasındaki ilişkinin belirlenmesinde frekanslandırmadan yararlanılmıştır. Elde edilen bulgularda sırasıyla öğretmenlerin matematik ve matematik öğretmeye yönelik görüşleri hakkında bilgiler önce verilmiş olup daha sonra derslerinde kullandıkları örnek türleri ve açıklamalarına yer verilmiştir. Çalışmaya katılan Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4 öğretmenlerine ait bazı önemli verilere çalışmanın bu bölümünde sırası ile yer verilmiştir.

Ö1 öğretmeni ile yapılan görüşmede öncelikle *"sizce matematik nedir?"* sorusu sorulmuştur. Ö1 öğretmeni ise matematiğin, *"doğru düşünebilme sanatı"* olarak yanıtlamıştır. Ö1 öğretmeni daha sonra matematik eğitiminin öğrencilerin yorum yapabilme yeteneğini ve düşünme becerisini geliştirdiğini ifade etmiştir. Ö1 öğretmeni, matematik eğitiminin öğrencilerin daha sistematik düşünmesini sağladığını ve matematiğin aslında bir doğru düşünme sanatı olduğunu belirtmiştir. Matematik eğitiminde kavramsal bilginin işlemsel bilgiye göre daha önemli olduğunu vurgulamış olup derslerinde bazı kuralların nereden geldiğini açıklamak için ispat yaptığını belirtmiştir. İspat yapmanın öğrencinin matematiksel düşünme becerisini geliştireceğini ifade etmiştir. Dersteki örneklerini bazen kendisinin oluşturduğunu bazen de ders kitapları ya da ekstra soru bankalarından seçtiğini ifade etmiştir. Örnek seçiminin sınıfın yapısına ve durumuna göre değişebileceğini belirtmiştir. Çünkü öğrencilerin dersteki soruları ya da konu ile ilgili açıklamalarına bağlı olarak yeni örneklere ihtiyaç duyabileceğini ifade etmiştir. Örneklerin açık, anlaşılır olmasına dikkat ettiğini belirtmiştir.

Ö1 öğretmeninin derslerinde öğretici ve açıklayıcı rollerde olduğu ama genel olarak açıklayıcı rolde olduğu yapılan gözlemlerin frekanslandırılması sonucunda elde edilmiştir. Ö1 öğretmeninin derslerinde başlangıç, standart, geliştirici, örnek dışı ve uç örneklerden yaralandığı fakat en çok geliştirici örneklerden faydalandığı görülmüştür. Örneğin Ö1 öğretmeni, ikinci dereceden denklemler konusundan sonra ikinci dereceden eşitsizlikler konusuna geçmiştir. Ö1 öğretmeni, eşitsizlikler konusuna önce bir bilinmeyenli eşitsizliğin tanımını açıklayarak şu şekilde başlamıştır:

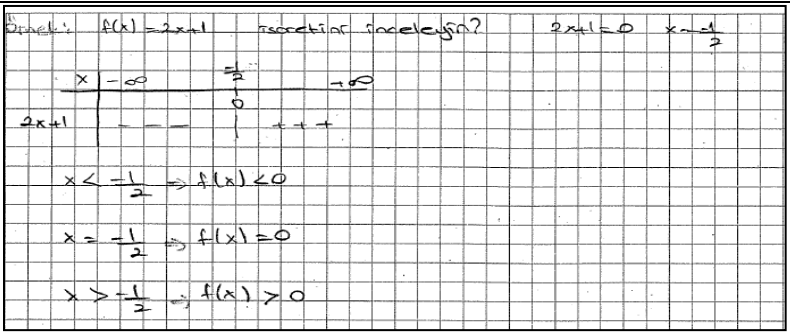


a sıfırdan farklı olmak üzere ax+b≥0, ax+b>0, ax+b< 0 şeklindeki denklemlere çocuklar birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir. Eşitsizlikler çözülürken önce denklemi sıfıra eşitleyip denklemin kökünü bulun. Şimdi çocuklar biz bu denklemin grafiğini çizersek nasıl bir görüntü çıkar?.... (öğrenci doğrusal) evet doğrusal bir grafik yani doğru denklemi peki grafiği çizelim…. Denklemin kökü $\frac{-b}{a}$ *bu durumda x eksenin altındaki görüntü ne olur?.... (öğrenci 0 dan küçük) yani negatif x eksenini üst kısmında görüntü o zaman pozitiftir yani sıfırdan büyüktür.Bunu tablo yöntemi ile gösterecek olursak tablo da a katsayısının işaretinin aynısı ile başlarız kök olduğunda işaret değişir a'nın işaretinin tersini alırız. Çözüm olarak neresi istenirse o kısmı alırız.*

Şekil 2. Ö1 öğretmeni eşitsizlikler konusuna ait açıklaması

Ö1 öğretmeni, öğrencilerine birinci dereceden eşitsizlik ifadelerinin çözüm kümesini bulurken yapmaları gerekenleri, çözüm adımlarını ve bu çözüm adımlarının gerekçelerini açıklamıştır. Bununla birlikte eşitsizlik kavramının ne anlama geldiğini doğru grafiği ve eşitsizliklere ait tablo ile açıklamıştır. Tabloda kök varken işaretin neden değiştiğini doğru grafiği ile ilişkilendirerek açıkladığı gözlenmiştir. Bununla birlikte öğretmen, kavramı açıklamasının yanı sıra eşitsizliklerin nasıl çözülebileceği ve çözüm kümesinin nasıl bulunabileceği üzerinde de durmuştur. Bu yüzden Ö1 öğretmeninin bu noktadaki açıklamaları açıklayıcı rol olarak değerlendirilmiştir.

Ö1 öğretmeni, konu ile ilgili yapmış olduğu açıklamasının ardından Şekil 3'teki başlangıç örneğini öğrencilerine şöyle ifade etmiştir:



Şimdi çocuklar önce ne yapıyoruz denklemin kökünü buldunuz mu?... evet kökü $\frac{-1}{2}$ o zaman tablo dan önce herkes bu ifadenin grafiğini defterine çizsin.(öğretmen tek tek öğrenciilerinin defterine bakar) tablo yaparsak önce işaret olarak x'in katsayının işareti ile başlıyoruz.nedir o?grafiğinze bakın... '+' bu ifadenin grafiğine bakarsanız $\frac{-1}{2}$ den büyük olduğu yerde grafik x ekseninin üst tarafında ve artı yani pozitiftir. İşte bu yüzden tabloda en büyük dereceli terimin işareti ile başlıyoruz, sonra kök var işaret değişir '– ' pekişimdi bizden sıfırdan küçük sayıların çözüm kümesini isterse x<$\frac{-1}{2}$yani f(x)<0 eğer x=$\frac{-1}{2}$ise f(x)=0 ve x>$\frac{-1}{2}$ise f(x) >0 dır. (Ö1)

Şekil 3. Ö1 öğretmeni eşitsizlikler konusuna ait başlangıç örneği

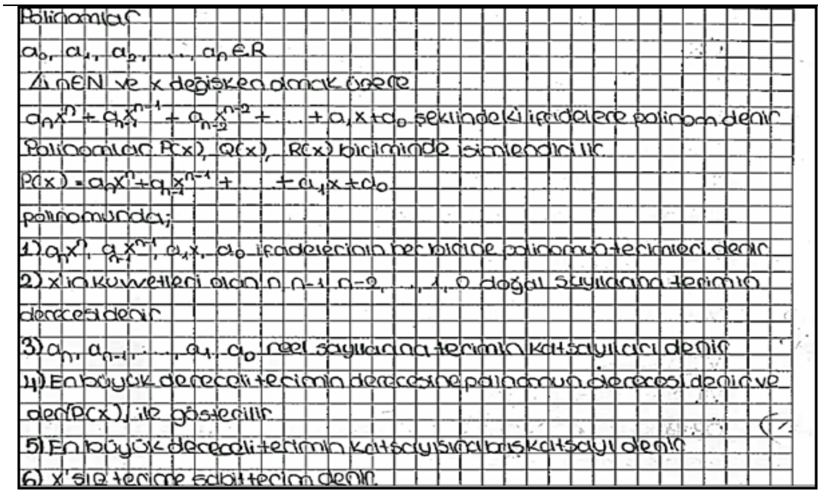
Ö1 öğretmeninin, bu örnek ile birlikte birinci dereceden bir eşitsizlik ifadesinin çözüm kümesinin nasıl bulunduğunu tablo üzerinden öğrencilerine Şekil 3'teki başlangıç örneğini kullanarak açıkladığı gözlenmiştir. Ö1 öğretmeninin, örneği kullanım amacı ders bitiminde sorulmuştur ve şu şekilde belirtmiştir:

> *"Öğrencilerim 2x+1 ifadesinin grafiğini çizebiliyor bende onların bu bilgisinden yararlanarak işaretin nasıl değiştiğini göstermek istedim. Böylelikle işaret tablosunda kök olduğunda işaretin nasıl değiştiğini açıklamış oldum. Buradan yola çıkarak bu durumu ikinci dereceden denklemlere genellemek istedim aslında. Birinci dereceden bir denklemin grafiğini çizmeyi sekizinci sınıftan beri biliyorlar. Zaten 9. Sınıfta da anlattık... "*

Ö1 öğretmeni, öğrencilerin birinci dereceden denklemler bilgisi ile birlikte grafik üzerinden işaret tablosunu incelemiştir. Ö1 öğretmeni, bu örneği ikinci dereceden eşitsizliklerin çözüm kümesinin nasıl bulunduğunu göstermek için bir araç olarak kullandığını ifade etmiştir. Ö1 öğretmeni, basit eşitsizliklerin çözümünü geçen seneden farklı olarak tablo yöntemiyle öğrencilerine açıkladığını, böylelikle öğrencilerinin bildiği bir durumu farklı şekillerde ifade ederek yeni konuya hazırlamaya çalıştığını belirtmiştir. Bu yüzden Ö1 öğretmeninin bu örneği başlangıç örneği olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca öğretmenin dersindeki açıklaması ve davranışları incelendiğinde; bu örnek ile birlikte işaret değişiminin ne anlama geldiğini açıkladığı ve aynı zamanda bir prosedürün nasıl uygulandığını da çözüm adımları ve gerekçeleri ile birlikte açıkladığı gözlenmiştir. Öğretmenin işaret tablosunda neden x değişkeninin işareti ile başlandığını ve neden kök olması durumunda işaret değiştirildiğini açıklamasından dolayı açıklayıcı rol olarak değerlendirilmiştir.

Ö2 öğretmeni ile yapılan görüşmede *"sizce matematik nedir?"* sorusuna "*doğru yorum yapabilme"* olarak cevaplamıştır. Matematik eğitiminin öğrencilerde doğru yorum yapabilme yeteneğini, işlem becerilerini ve problemler çözme becerilerini geliştirdiğini belirtmiştir. Matematik eğitiminin öğrencilerin doğru düşünebilme, öğrendiklerini günlük hayatta uygulayabilme, yorum yapabilme yeteneklerini geliştirdiğini ve öğrencilere farklı bakış açıları kazandırdığını ifade etmiştir. Ö2 öğretmeni, öğrencilerin matematiksel yeteneklerinin doğuştan geldiğini ve öğrencilerin çalışarak sadece belli bir yere kadar gelebileceğini düşünmektedir. Matematik eğitiminde kavramsal bilginin daha önemli olduğu söylemekle birlikte işlemsel bilginin gelişmesi için de uygulamalara daha fazla yer verilmesi gerektiğini de vurgulamaktadır. Matematik öğretirken önce gerekli ispatlar yaptığını daha sonra basitten zora doğru yorum içeren sorulara yer verdiğini ifade etmiştir. Derslerinde ilişkilendirme ve yorum içeren örneklere daha çok yer verdiğini belirtmiştir. Örneklerini okul ders kitaplarının yanı sıra belirli kaynaklardan seçtiğini söylemiştir. Örnek seçiminin sınıfın yapısına ve durumuna göre değişebileceğini ifade etmiştir.

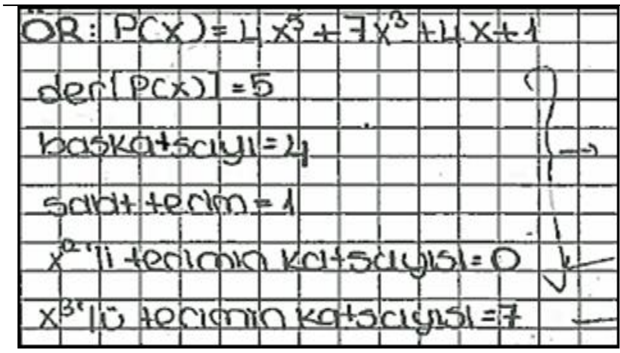
Ö2 öğretmenin derslerinde öğretici ve açıklayıcı rollere sahip olduğu ama frekanslandırma sonuçlarına göre bir farkla öğretmenin öğretici rolünün daha fazla olduğu gözlenmiştir. Ö2 öğretmeninin derslerinde başlangıç, standart, geliştirici, örnek dışı ve uç örneklerden yararlandığı görülmüştür. Öğretmenin derslerinde en çok standart ve geliştirici örneklerden yararlandığı sadece bir farkla geliştirici örnek türünün daha fazla olduğu tespit edilmiştir. Örneğin; Ö2 öğretmeni, polinomlar konusuna başlarken öğrencilerine polinomların fonksiyonlara benzediğini, fakat fonksiyonların daha kapsamlı bir konu olduğunu ifade etmiştir. Ö2 öğretmeni, daha sonra tahtaya polinomlar ile ilgili Şekil 4'deki ifadeyi yazmış ve şöyle açıklamıştır:



"a_1, a_2....a_n ∈ Rve x'in kuvvetleri birer doğal sayı olmak koşulu ile bu şekilde olan ifadelere polinom denir. En büyük dereceli terimin derecesine polinomun derecesi denir. derp(x) ile gösterilir. En büyük dereceli terimin katsayısına baş katsayı denir. x'siz terime sabit terim denir."

Şekil 4. Ö2 öğretmeninin polinom konusuna ait açıklaması

Ö2 öğretmeni, matematiksel bir ifadenin polinom olabilmesi için katsayılarının birer reel sayı ve aynı zamanda *x* değişkeninin kuvvetlerinin de doğal sayı olması gerektiğini ifade etmiştir. Ancak bu şekildeki ifadelere polinom denildiğini ifade etmiştir. Bu açıklamalarının yanında Ö2 öğretmeni, katsayı, baş katsayı, polinomun derecesi ve sabit terim gibi ifadelerin tanımlarını öğrencilerine yeteri kadar ifade etmemiştir. Ö2 öğretmeni, bu ifadelerin ne anlama geldiğini açıklamamıştır. Bu yüzden Ö2 öğretmeninin bu açıklamaları öğretici olarak değerlendirilmiştir. Ö2 öğretmeninin, bu açıklamalarının ardından Şekil 5'deki standart örnek ile yapmış olduğu tanımların ne anlama geldiğini öğrencilerine açıkladığı gözlenmiştir.



"Çocuklar yazdığım bu matematiksel ifadeye bakarsanız, bu bir polinomdur. Neden?...Çünkü x'lerin kuvveti birer doğal sayıdır. Peki, bu polinomun en büyük derecesi 5 dir. Kuvvetler 5,3,1 ve sabitin derecesi 0'dır. Biz buna polinomun derecesi diyoruz. En büyük derecenin katsayısı nedir?....4 bu da polinomun baş katsayısıdır. X^2 ifadesinin katsayısı 0 çünkü böyle bir terimimiz yok. X^3 ifadesinin katsayısı 7 dir…."

Şekil 5. Ö2 öğretmeni polinomlar konusuna ait standart örneği

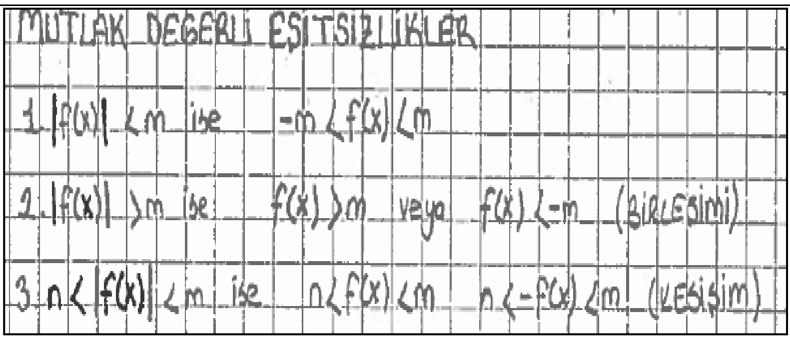
Ö2 öğretmeni ile ders sonunda yapılan görüşmede bu örneği kullanım amacını şu şekilde açıklamıştır:

> *"Polinomun tanımını bu örnek ile öğrencilere ifade etmek istedim. Ayrıca polinom olan ifadenin bir baş katsayısını, sabit terimi ve derecesi gibi kavramları da ifade etmek istedim."*

Ö2 öğretmeni, katsayı, baş katsayı, polinomun derecesi ve sabit terim gibi kavramların ne anlama geldiğini standart bir örnek aracılığıyla tek tek açıklamış öğrencilerine bu ifadenin neden bir polinom olduğunu sormuş ve onlardan dönüt aldığı gözlenmiştir. Öğretmenin sınıf içindeki bu davranışı, açıklayıcı rol olarak değerlendirilmiştir. Ö2 öğretmeni, aynı zamanda polinomun özelliklerine vurgu yapmış, fakat polinomun neden derecelerinin birer doğal sayı olduğunu açıklamamıştır. Bu yüzden öğretmenin bu açıklaması, öğretici olarak değerlendirilmiştir.

Ö3 öğretmeni ile yapılan görüşmede, "*sizce matematik nedir?*" sorusunu "*hayatı boyunca bir sonraki ihtimalleri hesap edebilme ihtimallerinin farkında olabilmek*" diye yanıtlamıştır. Öğrencinin matematik dersinde başarısız olmasını düzensiz ve disiplinsiz çalışmasının yanı sıra temeldeki işlem bilgisinin eksikliğinden kaynaklanabileceğini belirtmiştir. Ö3 öğretmeni matematik eğitiminde işlemsel bilginin daha önemli olduğunu düşünmektedir. Üniversite sınavı için özellikle işlemsel bilginin daha önemli olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerin özellikle formüllerin nasıl uygulandığını bilmesi gerektiğini vurgulayarak öğrencilerinin bol soru çözerek konuyu daha iyi öğrenebileceklerini belirtmiştir. Öğrencilerin tanımlar ve kuralların anlamlarından ziyade örneklerle konuyu daha iyi anlayabileceklerini ifade etmiştir. Örneklerini yapılandırırken belli kaynaklardan seçtiğini kendisi oluşturmadığı belirtmiştir. Konuların birbirleri ile bağlantılı olmasını sağlayan, tanımın niteliklerini içeren, geçmiş konularla bağlantılı, öğrenciyi düşündüren örnekleri tercih ettiğini belirtmiştir. Örneklerinin sınıflara göre değişiklik göstermeyeceğini de vurgulamıştır.

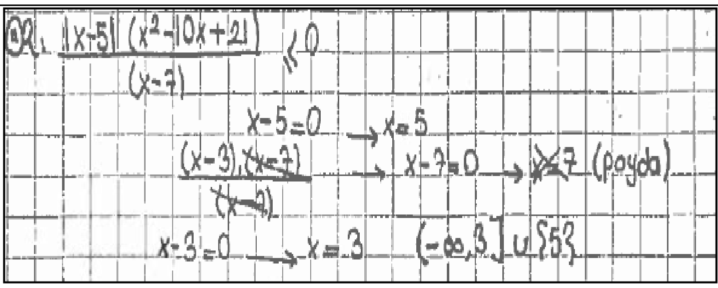
Ö3 öğretmenin de derslerinde öğretici ve açıklayıcı rollere sahip olduğu fakat genelde öğretici rolünün daha baskın olduğu görülmüştür. Aynı zamanda Ö3 öğretmeninin derslerinde başlangıç, standart, geliştirici, örnek dışı ve uç örneklerden yararlandığı gözlenmiştir. Bu örnek türlerinden ise en fazla standart örnekleri tercih ettiği tespit edilmiştir. Bu veriler ise ders içinde şu şekilde gözlenmiştir. Örneğin; Ö3 öğretmeni eşitsizlik ifadeleri ile mutlak değer kavramının ilişkilendirilebileceğini ifade etmiş, bu yüzden mutlak değer konusu ile ilgili bazı önemli bilgileri öğrencilerine Şekil 6'daki gibi hatırlatmıştır.



"mutlak değerli eşitsizliklerde eğer fonksiyonun mutlak değeri m sayısından küçük ise fonksiyon –m ile +m arasında olması şayet fonksiyonun mutlak değeri m sayısından büyük ise o zaman ne olacaktı?...fonksiyon m sayısından büyük ya da fonksiyon –m sayısından küçüktür. Fonksiyonun mutlak değeri herhangi iki sayı arasında ise bu sayıların bir artılı ifadesi birde eksili ifadesi arasında olacaktır."

Şekil 6. Ö3 öğretmeninin eşitsizlikler konusuna ait açıklaması

Ö3 öğretmeninin açıklamasında kuralları doğrudan ifade ettiği, bu kuralların ne anlama geldiği ve neden ihtiyaç duyacakları hakkında öğrencileri bilgilendirmediği gözlenmiştir. Ö3 öğretmeni, öğrencilerinin daha önceden bu kuralları öğrendiğini, bu yüzden hatırlatma yaptığını ifade etmiştir. Fakat Ö3 öğretmeninin mutlak değerle ilgili bu kuralları gerekçelendirmeden öğrencilerine doğrudan ifade etmesinden dolayı öğretici rolünde değerlendirilmiştir. Ö3 öğretmeni, bu açıklamasının ardından bu durumun konu ile olan ilişkisini göstermek için Şekil 7'deki geliştirici örneği sunmuştur.



"mutlak değerli ifadeyi çift katlı kök gibi düşünün onun sonucu daima artıdır. x^2*-10x+21 ifadesini çarpanlara ayırırsanız payda ile sadeleşir. İfade sıfırdan küçük eşit bu durumda x-3 sıfırdan küçük eşit olacak çözüm kümesi eksi sonsuzdan 3'e kadar ve 3'ten kapalı ama 5 çözüm kümesine ekleyin çünkü sıfıra eşit olanları da çözüme alacağız."*

Şekil 7. Ö3 öğretmeni eşitsizlik konusuna ait geliştirici örneği

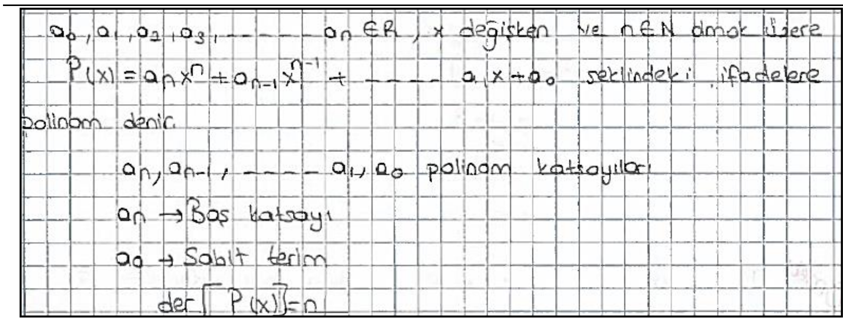
Ö3 öğretmeni bu örneği kullanma amacını şu şekilde ifade etmiştir:

> *"amacım mutlak değerli bir ifade ile başka bir matematiksel ifade bir arada olduğunda oluşan yeni ifadenin çözüm kümesinin nasıl bulunacağını öğrencilere açıklamak."*

Ö3 öğretmeninin Şekil 7'deki geliştirici örnek ile prosedürün nasıl uygulandığını ifade ettiği çözüm adımlarını açıkladığı fakat bunların gerekçeleri hakkında öğrencilerini bilgilendirmediği gözlenmiştir. Örneğin mutlak değerli bir ifadenin neden çift katlı kök gibi değerlendirilmesi gerektiği hakkında öğrencilerine hiç bir açıklama yapmamıştır. Bu yüzden Ö3 öğretmeninin sınıf içindeki bu rolü öğretici olarak değerlendirilmiştir.

Ö4 öğretmeni, "*sizce matematik nedir?*" sorusuna *"dört işlem yapabilme yeteneği, hesaplama yapmak"* şeklinde cevap vermiştir. Öğretmenin açıklamasına göre matematiği hesaplamalar ve işlemler olarak tanımlamıştır. Ö6 öğretmeni, matematik eğitiminde işlemsel bilginin kavramsal bilgiye göre daha önemli olduğunu ifade etmiştir. Çünkü öğrencilerin üniversite sınavında işlemsel bilgiye daha çok ihtiyaç duyacaklarını belirtmiştir. Matematik eğitiminde tanım ve kurallardan ziyade öğrencilerinin bu bilgileri nasıl kullanıldığını bilmesinin daha önemli olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerin matematikte bol soru çözerek ve matematiğe ilgileri varsa başarılı olabileceğini belirtmiştir. Öğrencilerin konuları bol soru ve örnekler aracılığıyla kavrayacağını belirtmiştir. Bu yüzden örneklerini yapılandırırken özellikle formüllerin nasıl uygulandığını göstermek, konular arası bağlantıları sağlamak ve tanımlara ait özellikleri göstermek için örneklerden yararlandığını ifade etmiştir. Örneklerini yapılandırırken ders kitaplarından ve özel yayınlardan yararlandığını belirtmiştir.

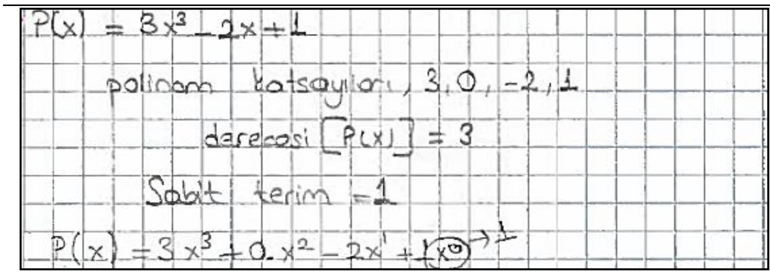
Ö4 öğretmenin de sınıf içindeki rollerinde öğretici ve açıklayıcı olduğu fakat yapılan frekanslandırmada genel olarak öğretici rolünde olduğu gözlenmiştir. Ayrıca Ö4 öğretmeninin derslerinde başlangıç, standart, geliştirici, örnek dışı ve uç örneklere yer verdiği gözlenmiştir. Bu örnek türlerinden ise en fazla standart örneklere yer verdiği görülmüştür. Öğretmenin sınıf içindeki rolüne ait veriler ise şu şekilde gözlenmiştir. Örneğin; polinomlar konusuna, polinomun tanımını ifade ederek derse başladığı gözlenmiştir. Ö4 öğretmeni, tanımı tahtaya yazdıktan sonra polinomun katsayısını, baş katsayısını, sabit terimini ve derecesini öğrencilerine Şekil 8'deki gibi açıklamıştır.



"çocuklar a_0, a_1,a_2, ...$a_n \in R$ olmak üzere x değişkenin kuvvetleri de birer doğal sayı olmak şartıyla belirtilen bu ifadeye bir polinom denir. a_0, a_1,a_2, ...a_n bu ifadelere polinomun katsayıları denir. En büyük derece polinomun derecesidir ve bunun katsayısına baş katsayı denir. Aslında polinomda fonksiyonlara benzer sadece biz bu dediğim özellikte olan ifadelerle işlem yapacağız. Bazı işlemleri görünce fonksiyonlar gelecek aklınız

Şekil 8. Ö4 öğretmeni polinomun tanımına ilişkin açıklaması

Ö4 öğretmeni polinomları, kuvveti birer doğal sayı ve katsayıları birer reel sayı olan ifadeler olarak tanımlamıştır. Bu tanımından sonra polinomun derecesini ve baş katsayısını ifade etmiştir. Ö4 öğretmeni, polinomların fonksiyonlara benzediğini fakat hangi yönüyle benzediğini ya da hangi yönleriyle farklılık gösterdiğini açıklamamıştır. Ayrıca Ö4 öğretmenini, bu tanımı öğrencilerine doğrudan ifade etmesi ve tanımın ne anlama geldiğini tam olarak açıklamamasından dolayı, yapmış olduğu açıklaması ile öğretici rolünde olduğu gözlenmiştir. Polinomun tanımına uygun Şekil 9'daki standart örneği kullanmış ve şu şekilde açıklamıştır:



"Bu polinomun katsayıları 3,0,-2 ve 1'dir. 0 burada derecesi 2 olan ifadenin katsayısıdır. Polinomun derecesi azalarak devam eder. Bu sıralamaya göre olmayan derece varsa katsayısı sıfırdır. Polinomun derecesi 3 en büyük kuvvet dereceydi biliyorsunuz. Sabit terimi ise 1 dir. Bakın azalarak gider demiştik kuvvetler için sabit terimin derecesi o zaman ne olur?....evet sıfır...."

Şekil 9. Ö4 öğretmeni polinomun tanımına ait standart örneği

Ö4 öğretmeni, Şekil 9'daki standart örnek aracılığıyla polinomun derecesi, katsayıları, sabit terimini açıklamıştır. Ö4 öğretmeni polinom kavramına ait tanımların (sabit terim, katsayılar ve derece) ne anlama geldiğini standart örnek aracılığıyla açıklamıştır. Ö6 öğretmeni polinomlar kavramına ait tanımları örnek üzerinden tek tek açıklamasından dolayı, açıklayıcı rol olarak değerlendirilmiştir.

Öğretmenlere ait roller ve kullandıkları örnek türlerine ait frekanslandırmalara ilişkin veriler Tablo 4'de sunulmuştur.

Tablo 4. Matematik öğretmenlerinin öğretim sürecindeki rolleri ile kullandıkları örnek türleri

Öğretmenler	Öğretmen Rolleri			Örnek Türleri					
	Öğretici	Açıklayıcı	Kolaylaştırıcı	Başlangıç Örneği	Standart Örnek	Geliştirici Örnek	Uç Örnek	Örnek Dışı Örnek	Karşıt Örnek
Ö1	134	150	3	12	42	47	3	7	0
Ö2	135	134	0	12	43	44	2	3	0
Ö3	131	90	0	11	46	40	2	2	0
Ö4	155	76	0	9	52	31	2	2	0
T	555	450	3	44	183	162	9	14	0

Öğretmenlerin sınıf içindeki rolleri ile kullanmış oldukları örnek türlerine ait frekanslar Tablo 4'te sunulmuştur. Tablo 4'te de görüldüğü üzere araştırmaya katılan öğretmenlerden sadece birinin açıklayıcı rolde olduğu diğer üç öğretmenin ise sınıf içindeki rollerinin öğretici olduğu gözlenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmenlerin derslerinde kullandıkları örnekler incelendiğinde geliştirici ve standart örneklerin öğretmenler tarafından daha çok kullanıldığı; örnek dışı ve uç örneklerin ise oldukça az kullanıldığı, karşıt örneklerin ise hiç kullanılmadığı tespit edilmiştir. Tablo 4'te açıklayıcı rolündeki öğretmenin derslerinde geliştirici örneklerden, standart örneklere göre daha fazla yaralandığı tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra açıklayıcı olan öğretmenlerin örnek dışı örneklere öğretici öğretmenlere göre daha fazla yararlandığı görülmüştür. Öğretici öğretmenlerin ders boyunca açıklamalarında standart örneklerden daha çok yararlandıkları belirlenmiştir. Öğretmenlerin öğretici ve açıklayıcı rolündeki açıklamaları birbirine çok yakın olduğu gibi, bu açıklamalarda kullanmış oldukları standart ve geliştirici örnek sayılarının da birbirlerine oldukça yakın olduğu gözlenmiştir. Ayrıca öğretmenlerden Ö1 dışında hiçbir öğretmenin kolaylaştırıcı role ait açıklamalar yapmadığı görülmüştür. Öğretmenlerin konulara göre bazı örnek türlerinden hiç yararlanmadıkları da görülmüştür. Örneğin öğretmenlerin polinom konusunda başlangıç ve karşıt örneklerden, ikinci dereceden denklem, eşitsizlik ve parabol konularında da uç, örnek dışı ve karşıt örneklerden açıklamaları esnasında hiç yararlanmadıkları da tespit edilmiştir.

4. Tartışma ve Sonuçlar

Matematik öğretmenlerinin öğretim sürecinde öğretici ve açıklayıcı rollerde oldukları, bu rollerin konulara göre değişmediği sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte bu role sahip öğretmenlerin derslerinde standart ve geliştirici örnekleri daha çok kullandıkları tespit edilmiştir. Örneğin; açıklayıcı rolde olan Ö1 öğretmenin açıklamalarında geliştirici örnekleri diğer örnek türlerine göre daha fazla kullandığı görülmüştür. Benzer şekilde; öğretici rolünde olan öğretmenlerin de açıklamalarında standart örnekleri diğer örnek türlerine göre daha fazla kullandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca açıklayıcı öğretmenin örnek dışı örnekleri, öğretici öğretmenlere göre daha fazla kullandığı görülmüştür. Bu durum açıklayıcı olan öğretmenlerin matematiksel bilgide kavramsal anlayışa sahip olmaları, yani matematiksel kavram, formül ve işlemleri en iyi şekilde kavratmaya çalışmalarından (Thompson, 1992) kaynaklanabileceği düşüncesine yol açmıştır. Çünkü hem geliştirici örnekler hem de örnek dışı örneklerin kullanım amaçları dikkate alındığında; geliştirici örneklerde kavramın sınırlarını genişletmek, kavrama ait ayrıntılara dikkat çekmek hedeflenmektedir. Örneğin; polinom konusunun fonksiyon konusu ile olan ilişkisinden ya da ikinci dereceden bir denklem ile parabol konusu arasındaki ilişkiyi göz önüne sermeye çalışan örnekler olduğu görülmektedir (Alkan, 2016; Alkan ve Güven, 2018). Benzer şekilde örnek dışı örneklerin de hangi durumlarda kavrama ait örnek olamayacağını (Alkan, 2016; Alkan ve Güven, 2018; Tsamir, Tırosh ve Lewinski, 2008) yani başka bir deyişle polinom ise hangi durumda polinom olmadığını hatta polinom ile fonksiyon kavramları arasındaki farklılıkları ifade etmek için kullanılan örnekler olduğu görülmüştür. Buradan yola çıkarak öğretmenlerin kullandıkları örnek türlerine bağlı olarak; açıklayıcı öğretmenlerin konuları öğrencilere daha kapsamlı bir şekilde öğretmeye çalıştıkları söylenebilir. Özellikle kavrama ait örneklerin yanı sıra kavrama ait olmayan örneklere daha fazla yer vermeleri bu duruma destek olarak sunulabilir. Öğretmenlerin kullandıkları örnek sayısı ve buna bağlı olarak kullandıkları örnek türlerinde konuya göre farklılıklar oluşmuştur. Örneğin; ikinci dereceden denklem, eşitsizlik ve parabol konularında açıklayıcı roldeki öğretmenlerden sadece Ö1 öğretmeni yukarıda bahsedilen duruma benzer şekilde geliştirici örneklere açıklamalarında daha çok yer verirken, öğretici rolünde yer alan Ö2 ve Ö3 öğretmenlerin de açıklamalarında geliştirici örneklere daha çok yer verdiği tespit edilmiştir. Başka bir ifade ile öğretmenlerin rolleri farklı olmasına rağmen frekanslara göre kullandıkları örnek türünün aynı olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin aynı tür örnekleri daha fazla kullanmasının nedenlerinden biri bu öğretmenlerin birbirleriyle olan iletişimleri olabileceği düşünülmüştür. Çünkü Ö1, Ö2 ve Ö3 öğretmenleri ile yapılan görüşmelerde; bu öğretmenler, derslerin işleniş biçimlerini birlikte planladıklarını ve derslerinde benzer örnek türlerine yer vermeye çalıştıklarını ifade etmişlerdir. Bu nedenle öğretmenler derslerinde aynı amaca yönelik örneklere daha çok yer vermiş olabilirler. Fakat bu öğretmenler her ne kadar aynı örnek türüne derslerinde yer vermiş olsalar da, öğretmenlerin bilgileri ve inançları birbirleriyle bağlantılı olarak onların öğretimsel kararlarında birlikte rol oynadıkları (Ernest, 1989; Irez, 2007) söylenebilir. Matematiksel aktivitelerde öğretmenlerin inançlarının rolünün büyük olduğu İfade edilebilir. Öğretmenler ile yapılan görüşmede onların matematiğe bakış açılarının sınıf içi davranışlarını ve kullandıkları örnek türlerini etkilediği sonucuna varılmıştır. Örneğin Ö1 öğretmeni matematikte kavramsal öğrenmenin önemli olduğunu ifade etmiş, bu doğrultuda seçtiği örnek türlerinde de kavramsal öğrenmeyi ön plana çıkarmaya çalıştığı gözlemlenmiştir. Benzer şekilde Ö4 öğretmenin de işlemlerin matematik eğitimi için daha önemli olduğunu vurguladığı ve kullandığı örnek türlerinde de kuralları ya da prosedürleri öğrenmeyi ön planda tutmaya çalıştığı gözlenmiştir. Bu araştırmada ve literatür de yer alan araştırmalarda (Stipek ve diğerleri, 2001) benzer bir sonuç olarak; öğretmenlerin öğretme ve öğrenme ile ilgili değer yargılarının ve inanışlarının, onların sınıf içi uygulamalarını etkilediğini ortaya koyulmuştur.

Çalışmada dikkat çeken bir diğer önemli tespit ise öğretmenlerin hiç birinin karşıt örnek kullanmayışlarıdır. Bu örnek türünün kullanım amacına bakıldığında öğrencilerin aşırı genellemeler sonucu oluşabilecek hatalarını, yanılgılarının önüne geçmek bunun yanı sıra öğrencilerin soruları doğrultusunda oluşturulmuş olmasıdır. Bu durum öğretmenlerimizin kolaylaştırıcı rollerinin olmayışı ve genelde öğretici rolde olmalarından kaynaklanabilir. Çünkü kolaylaştırıcı öğretmenlerin derslerinde öğrencilerin yanlış anlamalarını gidermek için onlara yeni görevler tanımlar ve matematik öğrenmelerine yönelik yeni sorumluluklar verir. Aynı zamanda öğrencilerinin yeni fikir ve düşünceler ortaya atmalarında teşvik edici olur. Bunun aksine öğretici öğretmenlerin ise derslerinde kontrolü ellerinde tutmaya çalıştığını, bu durumda öğrencilere daha az söz hakkı tanındığını ifade etmiştir. NCTM (1991) standartları ise öğretmenlerin, matematik aktivitelerinde her yönüyle kontrolü ellerinde tutmaktan vazgeçmelerini ve öğrencilere kendi problemleriyle yüzleşip kendi stratejilerini geliştirmelerine izin vermelerinin öğrencilerin matematiksel gelişimleri için daha iyi olacağını belirtmektedir. Bu bağlamda öğretmenlerimizin derslerinde öğrencilerinin düşüncelerinin rahatlıkla ifade edebilecekleri ortamlar hazırlamaları önerilebilir.

5. Öneriler

Öğretmenlerden sadece birinin açıklayıcı rolde olduğu diğerlerinin öğretici rollerde olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen rollerinde kolaylaştırıcı öğretmenlere rastlanılmaması da araştırmanın önemli sonuçlarından biridir. Bu durumun temelinde ise öğretmenlerin alan bilgisi, öğretim programları bilgisi ve bazen de onların matematiği öğretme ve öğrenmeye ilişkin inançlarından kaynaklandığı görülmüştür. Bu yüzden öğretmenlerin hizmet içi eğitimlerinde matematiği öğrenme ve öğretmeye yönelik inançlarını gözden geçirmelerine ve matematik bilgilerinin programın hedeflediği amaçlara uygun öğretim yapmalarını sağlayacak şekilde bilgilendirmelerin yapılması önerilir. Bunun yanı sıra öğretmenlerin örnek kullanımları ile ilgili bilgilerinin gerek literatürde gerekse araştırmada tespit edilen durumlarda yetersiz olduğu belirlenmiştir. Öğretmenlerin örnek kullanımının önemli olduğu ve öğrencilerin öğrenmelerinde öğretmenlerin örnek seçimlerinin etkili olduğu göz önünde bulundurulursa; öğretmenlere farklı örnek çeşitlerinin kullanılmasının önemli olduğu noktasında bilgilendirmeler yapılabilir. Özellikle üniversitede öğretmen adaylarının alan öğretimi ile ilgili derslerinde örnek ve örnek çeşitleri ilgili bu bilgilerin entegre edilmesi önerilir.

Kaynaklar / References

Alkan, S. (2016). *The classification of examples used by teachers and the analysis of its relationship with dimensions of instructional explanation* (Unpublished doctoral dissertation).Karadeniz Technical University, Institute of Educational Sciences, Trabzon.

Alkan, S. & Güven, B. (2018). Analysis of examples used in textbooks: the case of limit. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education* (TURCOMAT), *9* (1), 147-169. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.334530

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik öğretimi.* Trabzon: Derya Kitabevi.

Baki , A. & Gökçek, T. (2007). Some clues regardıng to teacher model adopted by preservıce mathematıcs teachers. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *32*(32), 22-31.

Banks, C. C. L. (2005). *Preservice teachers' personal epistemological beliefs in relation to their beliefs in the National Council of Teachers of Mathematics' Principles and Standards for school mathematics* (Unpublished doctoral dissertation). University of Northern Colorado.

Baydar, S. C. & Bulut, S. (2002). Importance of teachers' belıefs about nature of mathematıcs and teachıng of mathematıcs ın mathematıcs educatıon. *Hacettepe Universitesi Eğitim Fakultesi Dergisi, 23,* 62-66.

Bedel, E. F. (2008). Interactions among attitudes toward teaching and personality constructs in early childhood preservice teachers. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, *4*(1), 31-48.

Bills, L., Mason, J., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification: The use of examples in teaching and learning mathematics. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 16-21 July 2006, p. 125-154. Prague, Czech Republic.

Bütün, M. (2005). *The study of elemantary mathematics teachers' pedagogical content knowledge* (Unpublished master's thesis). Karadeniz Technical University, Trabzon.

Gerring, J. (2007). *Case study research: Principles and practices*. New York: Cambridge University.

Gökbulut, Y. (2010). *Prospective primary teachers' pedagogical content knowledge about geometric shapes* (Unpublished doctoral dissertation), Gazi Unıversity.

Erickson, D. K. (1993). Middle school mathematics teachers' view of mathematics and mathematics education, their planning and classroom instruction, and student beliefs and achievement. *Proceedings of the Annual Conference of the American Educational Research Association,* Atlanta, GA.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of education for teaching,*15(1),13-33.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* Hampshire: The Falmer Press.

Haser, Ç., Kayan, R. & Bostan, M. I. (2013). Preservice Mathematics Teachers' Beliefs about the Nature of Teaching and Learning Mathematics. *Education and Science*, *38*(167).

Helms, J. M., (1989). *Preservice Secondary Mathematics Teachers' Beliefs About Mathematics and Teaching of Mathematics: Two Case Studies* (Unpublished doctoral dissertation). Georgia Üniversitesi, Georgia.

Irez, S. (2007). Reflection-oriented qualitative approach in beliefs research. *Eurasia Jurnal of Mathematics, Science & Technology Education, 3*(1), 17-27.

Klibanoff, R.S. & Levine, S.C. (2006). Preschool Children's Mathematical Knowledge: The Effect of Teacher "Math Talk". *Developmental Psychology*, 42 (1), 59–69.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*, 29–63.

McDiarmid, G,W., Ball, D.L. & Anderson, C. (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject specific pedagojy. In M. C.Reynolds (Ed.), *Knowledge Base For the Beginning Teacher* (pp.193-205). Elmsford, NY: Pergamon Pres.

Merriam, S. B. (2013). *Qualitative research: A guide for design and implementation* (Translation from 3rd Edition, Translation Editor: S. Turan). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Beverly Hills: Sage Publications.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.*

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62,* 307-332.

Philippou, G. N. & Christou, C. (1999). Teachers' conceptions of mathematics and students' achievement: A cross-cultural study based on results from TIMMS. *Studies in Educational Evaluation*, 25, 379-398.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 550–577.

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 157-189.

Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M. & MacGyvers, V. L. (2001). Teacher's beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education,* 17*, 213-226.*

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational studies in mathematics*, *15*(2), 105-127.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions. Grouws, Douglas A. (Edt.), A synthesis of the research (p.127-146). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc, xi, 771 pp.

Tsamir, P., Tirosh, D. & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5.

Uysal, F. & Dede, Y. (2019). Mathematics teachers' mathematical beliefs based on their gender. *Ondokuz Mayis University Journal of Education Faculty, 38*(1), 215-237. https://doi.org/10.7822/omuefd.513835.

Watson, A. & Mason, J. H. (2002a). Extending example spaces as a learning strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 4, pp. 377–384). Norwich, UK: University of East Anglia.

Watson, A., & Mason, J. (2002b). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(2), 237-249. https://doi.org/10.1080/14926150209556516

Yılmaz, G. K. & Güven, B. (2014). Effectıve of the designed in-service training on the roles attributed to teacher in technology rich environments. *Journal of Bayburt Education Faculty*, *9*(2), 144-169.