

Mathematics Teachers' Understanding of the Concept of Mathematical Fluency

Yaşar Akkan

Trabzon University, Fatih Faculty of Education, Turkey (ORCID: 0000-0001-5323-7106)

Article History: Received: 12 May 2021; Accepted: 24 July 2021; Published online: 31 August 2021

Abstract: Although fluency is a widely used concept to describe a student's reading ability, its use in mathematics curriculum is relatively new. Given that mathematics has a language of its own, it makes sense for teachers to want students to be fluent and able to convey what they understand. In this sense, fluency is an important aspect of students' ability to work mathematically. Students need not only to develop knowledge of mathematical concepts, but also to demonstrate this knowledge by working with mathematical processes. Therefore, determining the opinions of teachers about this concept will shed light on determining the features such as determining, monitoring and evaluating mathematical fluency in students, as well as identifying the points needed for future learning. In addition, as a result of the literature review, the scarcity of studies on the concept of mathematical fluency in our country draws attention, and it is thought that the current research will contribute to the field. For this purpose, with this study, both how mathematics teachers define the term "mathematical fluency" and their knowledge and beliefs about this concept were determined. The study has a sequential explanatory design from mixed method typologies. The study was carried out with a total of 60 elementary and secondary school mathematics teachers working in different provinces of Turkey, an online questionnaire was applied to all teachers and semi-structured interviews were conducted with 12 selected teachers in virtual environments. In the analysis and presentation of the data obtained, descriptive statistics and content analysis techniques were used, which provide an explanatory and exploratory orientation to the research. As a result, it was found that both teachers have different perspectives (between each other) and complex understandings (within themselves) that match different ends of the traditional and contemporary spectrum regarding mathematical fluency.

Keywords: Mathematical fluency, Mathematics teachers, Conceptions

Öz: Akıcılık, bir öğrencinin okuma yeteneğini tanımlamak için yaygın olarak kullanılan bir kavram olmasına rağmen, matematik müfredatında kullanımı nispeten yenidir. Matematiğin kendine ait bir dili olduğu düşünüldüğünde, öğretmenlerin öğrencilerin akıcı olmalarını ve anladıkları şeyi aktarabilmelerini istemeleri mantıklıdır. Bu anlamda akıcılık, öğrencilerin matematiksel olarak çalışma becerilerinin önemli bir yönüdür. Öğrencilerin sadece matematiksel kavramlarla ilgili bilgileri geliştirmeleri değil, aynı zamanda bu bilgileri matematiksel süreçlerle çalışarak göstermeleri gerekir. Dolayısıyla öğretmenlerin bu kavrama ilişkin görüşlerinin belirlenmesi, öğrencilerde matematiksel akıcılığın belirlenmesi, izlenmesi ve değerlendirilmesi gibi özelliklerin belirlenmesine ve gelecekteki öğrenmeler için ihtiyaç duyulan noktaların belirlenmesine ışık tutacaktır. Ayrıca literatür taraması sonucunda ülkemizde matematiksel akıcılık kavramına yönelik çalışmaların azlığı dikkat çekmekte ve mevcut araştırmanın alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu çalışmanın amacı, matematik öğretmenlerinin hem "matematiksel akıcılık" terimini nasıl tanımladıkları hem de bu kavram hakkındaki bilgi ve inançları belirlemektir. Çalışma, karma yöntem tipolojilerinden açılımlı sıralı desen tasarımına sahiptir. Çalışma Türkiye'nin farklı illerinde görev yapan toplam 60 ilköğretim ve ortaokul matematik öğretmeni ile gerçekleştirilmiş, tüm öğretmenlere çevrimiçi anket uygulanmış ve seçilen 12 öğretmenle sanal ortamlarda yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Elde edilen verilerin analizinde ve sunumunda, araştırmaya açıklayıcı ve keşfedici bir yönelim sağlayan betimsel istatistikler ve içerik analizi teknikleri kullanılmıştır. Sonuç olarak matematiksel akıcılıkla ilgili olarak hem öğretmenlerin farklı bakış açılarına (birbirleri arasında) hem de öğretmenlerin (kendi içlerinde) geleneksel ve çağdaş yelpazenin farklı uçlarıyla eşleşen karmaşık anlayışlara sahip olduğu anlaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel akıcılık, Matematik öğretmenleri, Kavrayış

[Türkçe sürüm için tıklayınız](#)

1. Introduction

Although fluency is a widely used concept to describe a student's reading ability, its use in mathematics education is relatively new. Associated with fluency, literacy and language acquisition aspects at primary school level, so fluent reading has become a term widely used by teachers (Kuhn & Stahl, 2003). In different disciplines, fluency is expressed in different ways such as performing with ease, speaking smoothly or easily without effort, fluid, easily changed or adapted (URL-1, 2021). Although definitions of fluency outside of mathematics do not usually associate fluency with speed, fluency in mathematics is often associated with "speed or quick recall" (Ramos-Christian, Schleser & Varn, 2008; Wong & Evans, 2007).

The literature surrounding mathematics often defines fluency as procedural or procedural fluency (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; McClure, 2014; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014; Russell, 2000). As a matter of fact, many researchers delineate mathematical fluency with the concept of

Corresponding Author: Yaşar Akkan  **email:** yasarkakkan@trabzon.edu.tr

Citation Information: Akkan, Y. (2021). Mathematics teachers' understanding of the concept of mathematical fluency. *Turkish Journal of Mathematics Education*, 2(1), 84-109.

"procedural fluency" within the framework of mathematical proficiency – conceptual understanding, operational fluency, strategic competence, adaptive reasoning, productive disposition) – constructed by Kilpatrick et al. (2001). This view of mathematical fluency as being only procedural, can lead to a disconnect between the teaching of the procedure and the understanding of the concept of mathematics which need to be learned in unison (McClure, 2014). For example, Kilpatrick et al. (2001) stated that excessive time spent on computational procedures may harm the student's ability to deepen their understanding of mathematical ideas. Sullivan (2011; p.7) emphasized the need for teachers to develop in their student's fluency in calculation "as a way of reducing the load on working memory, so allowing more capacity for other mathematical actions". According to Foster (2014), it allows students to focus all their energies on solving more complex tasks rather than computational procedures, allowing them to see the big picture, selecting which strategies to use and being able to explain why they chose them. In this sense, students need to understanding why they are using specific strategies and know when it is appropriate to use different methods (McClure, 2014). According to McClure (2014) students who engage in a lot of practice without understanding what they are doing often forget, or remember incorrectly, those procedures.

Boaler (2015) approached fluency in mathematics with a more holistic perspective and stated that fluency includes not only "knowing" but also "doing" mathematics. Watson and Sullivan (2008) expressed mathematical fluency as having factual knowledge and concepts that come to mind immediately, as well as carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently and appropriately. Fosnot and Dolk (2001) defined mathematical fluency as knowing how a number can be composed and decomposed and using that information to be flexible and efficient with solving problems. Kilpatrick et al. (2001) stated that effective, flexible and correct use of procedures is essential for being mathematically fluent. As it can be understood from these definitions, students should not only develop their knowledge of mathematical concepts, but also demonstrate this knowledge by working with mathematical processes. In recent years, the tendency to see mathematics as a set of skills that must be memorized has shifted towards teaching, where problem solving comes to the fore and the mathematical processes that students use while learning mathematics are important (Anderson & Bobis, 2005; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). The importance of having knowledge of both skills and subject content is emphasized, along with the processes needed to use the skills and knowledge in a variety of situations. As a result, while mathematical fluency includes both the ability to perform procedures and an understanding of the mathematics learned, mathematical proficiency is nourished by being both procedural and conceptually fluent.

However, despite the emphasis on conceptual understanding in more contemporary approaches to teaching mathematics, traditional mathematics teaching methods that focus only on procedural fluency are still used, and there is still debate about "teaching for speed and teaching for meaning" and, if any, their relationship (Handal & Herrington, 2003; Thomas, 2012; Yates, 2006). Students often perform tasks with little or no knowledge of the processes, as they focus on procedural fluency rather than what the processes they go through while performing mathematical tasks (Hiebert, 1999; McClure, 2014). In particular, "quick recall" affects the way teachers teach mathematics, and this has the potential to cause mathematics anxiety in students from an early age. (Ashcraft & Krause, 2007; Boaler, 2015). In addition, associating fluency with rapid recall may encourage teachers and parents to value quick recall above all else (Bauer, 2013). Given the limitations of seeing fluency as merely memorizing procedures and remembering facts quickly, more research is needed on how teachers define fluency. In addition, when the literature on mathematics education is examined, it is understood that fluency is mostly defined as procedural, operational or computational fluency (Kilpatrick et al., 2001; McClure, 2014; NCTM, 2014; Russell, 2000). The terms "such as procedural, operational or computational" in these definitions may enable teachers to interpret fluency as being able to follow a defined formula or be able to calculate quickly in mathematics (Cartwright, 2018). For this reason, determining the conceptions of teachers about this concept will shed light on determining the characteristics such as determining, monitoring and evaluating mathematical fluency in students, as well as identifying the points needed for future learning. In addition, it is thought that this research will contribute to the field, since studies (Finnane, 2004; Foster, 2013; Graven, Nieuwoudt, Laubscher & Dreyer, 2012; Russell, 2000; Stott, 2013) on fluency in mathematics are generally conducted with students and there are few studies (Alptekin, 2019; Uysal, 2017) on the concept of mathematical fluency in our country. In this context, the aim of the study is to explore the conceptions of primary and secondary school mathematics teachers about the concept of "mathematical fluency". For this purpose, with this study, both how mathematics teachers define the term "mathematical fluency" and their knowledge and beliefs about this concept were determined.

2. Method

This section contains information about the research design, participants, data collection tools, data collection process and data analysis.

2.1. Research Design

This study, which aims to determine the perspectives of mathematics teachers on the concept of "mathematical fluency" both quantitatively and qualitatively, has a sequential explanatory design from mixed method typologies. In the first stage of this design, quantitative data is collected and analyzed, while in the second stage, qualitative data is collected and analyzed. In the next step, merging takes place during the interpretation of the data (Creswell, 2013).

2.2. Participants

The study was carried out with a total of 60 (30+30) primary and secondary school mathematics teachers working in different provinces of Turkey. In the selection of these teachers, convenient or convenience sampling method, which is one of the non-random sampling methods, was used. In this method, which accelerates the research, the researcher selects the participants who are close and easy to Access (Dawson & Trapp, 2001). Questionnaire forms designed online were applied to all of the teachers, and semi-structured interviews were conducted in virtual environments with 12 selected teachers, taking into account the data obtained from these questionnaires. In addition, the purposive sampling technique was also used in the selection of 12 teachers in order to conduct in-depth research on information-rich situations in the context of the purpose of the study. In the presentation of the interviews, secondary school mathematics teachers were coded as ÖL1 – ÖL6, and primary school mathematics teachers were coded as ÖÖ1 – ÖÖ6. Demographic information of the interviewed mathematics teachers is given in Table 1.

Table 1. Demographic information of teachers

Participants	Professional Experience (Year)	Education status	Class level taught
Ö _{O1}	4	Bachelor	5th and 6th grade
Ö _{O2}	12	Bachelor	7th grade
Ö _{O3}	8	Master student	7th and 8th grades
Ö _{O4}	22	Bachelor	6th, 7th and 8th grades
Ö _{O5}	17	PhD student	7th and 8th grades
Ö _{O6}	7	Bachelor	5th and 6th grades
Ö _{L1}	24	Bachelor	12th grade
Ö _{L2}	13	Bachelor	9th and 10th grades
Ö _{L3}	9	Master student	11th and 12th grades
Ö _{L4}	7	Bachelor	9th and 10th grades
Ö _{L5}	2	Bachelor	11th grade
Ö _{L6}	18	Master's degree	12th grade

2.3. Data Collection Tools

In this section, information about the data collection tools used in the research is given. The data of the study were collected with a questionnaire form and semi-structured interview questions prepared with the support of the literature (Cartwright, 2018). These two methods were chosen because they are important ways to get direct answers about the understandings, thoughts, opinions, beliefs and attitudes of mathematics teachers (Harris & Brown, 2010). A questionnaire is a systematic question form prepared to collect information from primary sources. The questionnaire is one of the methods that allows us to make certain generalizations about the target population by collecting data from relatively small but highly representative samples (İlhan & Deniz, 2021). For this reason, a questionnaire consisting of ten 5-point Likert-type items (Strongly Disagree (SD⁻); Disagree (D⁻); Neither agree nor disagree (N⁰); Agree (A⁺); Strongly Agree (SA⁺)) and two open-ended questions was used in the study. The 10 items in the questionnaire included three different dimensions (see Table 4): (I) How students communicate mathematical ideas, (II) Do teachers see mathematics as a dynamic subject (modern) rather than a fixed body of knowledge (traditional) about students' mathematics and fluency development? (III) How teachers' mindsets affect students' mathematics learning. The two open-ended questions in the questionnaire are as follows: "Which subject or learning domain comes to mind first when you hear the word fluency?" and "Write the three words that best describe mathematical fluency, in order?". Semi-structured interviews were conducted with the teachers in order to further examine the perspectives of mathematics teachers on the concept of "mathematical fluency". In the semi-structured interview technique, the interviewer prepares an interview protocol (see Table 2) that includes the questions he planned to ask before, and the interviewer can affect the flow of the interview with other questions or sub-questions according to the flow of the interview (Karasar, 1994).

Table 2. Semi-structured interview questions

Questions	Additional questions
1) How would you define mathematical fluency?	
2) What basic characteristics can be observed in students with mathematical fluency?	
3) Is mathematical fluency seen when students are speaking, or do you think it can be seen in students' writing?	In order to further deepen the answers to these questions, the researcher asked why?, how?, why?, which?, etc. questions were asked.
4) Is fluency related to mathematical skills such as reasoning, communicating, relating, and problem solving?	
5) Can students speak fluently without understanding? Or do you think students can understand without fluency?	
6) Some teachers associated fluency more with the concepts of numbers and operations. Is this the only area where fluency in mathematics is seen or required?	
7) Does a student's Turkish fluency affect their mathematical fluency? How does it affect it?	

2.4. Analysis of Data

Descriptive statistics and content analysis techniques, which provide an explanatory and exploratory orientation to the research, were used in the analysis and presentation of the obtained data. Descriptive statistics is the best technique for summarizing data and interpreting research results. For this reason, the frequency, arithmetic mean and standard deviation values of the items in the questionnaire form of the study were calculated, and the intervals in Table 3 were taken into account in the evaluation of the answers given to the questionnaire questions. It was assumed that the intervals were equal, and the score interval was calculated as 0.80 for the arithmetic means ($\text{Score Interval} = (\text{Highest Value} - \text{Lowest Value})/5 = (5 - 4)/5 = 4/5 = 0.80$).

Table 3. Evaluation range of arithmetic means according to 5-point Likert Scale

Intervals	Options
1.00 – 1.80	Strongly Disagree (SD ⁻)
1.81 – 2.60	Disagree (D ⁻)
2.61 – 3.40	Neither agree nor disagree (N ⁰)
3.41 – 4.20	Agree (A ⁺)
4.21 – 5.00	Strongly Agree (SA ⁺)

The sample used in quantitative design is used as a determinant in selecting samples for subsequent qualitative design (Kemper, Stringfield & Teddlie, 2003). Therefore, considering the data in Table 5 obtained as a result of descriptive statistics, 12 teachers were selected to conduct semi-structured interviews.

Content analysis was used in the analysis of the data obtained from the semi-structured interviews. Content analysis is a method frequently used in qualitative studies. The purpose of this method is to reveal the answers to the why and how questions while describing the researched situation. This aim is achieved by revealing the themes and the relationships between these themes through conceptual coding and classification. Thus, previously unambiguous and unclear meanings, views, approaches and values about the examined teachers are revealed (Baki, 1994). In this sense, in the content analysis process, firstly, the data obtained from the mathematics teachers were transcribed, and then the transcripts were coded.

2.5. Validity and Reliability

In order to ensure the reliability of the research, the research design suitable for the research problem was selected and the findings obtained from the research were presented accordingly. In addition, after the coding of the collected data, participant confirmation was made and the suitability of the coding was checked. In this context, the coding process was carried out in a controlled manner with a faculty member and the coding was evaluated as "appropriate" and "not appropriate" by this researcher. The agreement between encoders was calculated as 87%. According to Güler and Taşdelen-Teker (2015), this value is sufficient for inter-coder agreement. In order to ensure the validity of the research, direct quotations from the statements of the teachers were included and the whole process, including the study group, was described in detail, and the situations under which the research could be repeated were reflected.

Table 4. Data obtained from questionnaire items by using descriptive statistics

No	Questionnaire items (* marked negative items)	Dimensions	Elementary mathematics teachers							Secondary school mathematics teachers						General		
			SD ⁻	D ⁻	N ⁰	A ⁺	SA ⁺	\bar{x}	σ	SD ⁻	D ⁻	N ⁰	A ⁺	SA ⁺	\bar{x}	σ	\bar{x}	σ
			Frequencies							Frequencies								
1	A lot of things in mathematics must be accepted and remembered as perfectly correct.	III	2	6	5	15	2	3.60	1.20	3	8	5	12	2	3.31	1.36	3.46	1.28
2	Mathematical ideas are something students can explore for themselves.	III	4	4	3	14	5	3.40	1.30	5	5	4	13	3	3.13	1.32	3.25	1.31
3	Mathematical fluency depends on students' capacity to remember procedures.	II	4	4	6	10	6	3.33	1.32	3	3	7	12	5	3.43	1.19	3.38	1.25
4	Students may be mathematically fluent but still may not understand the concepts.	II	4	2	6	11	7	3.50	1.31	3	3	5	12	7	3.57	1.25	3.53	1.28
5*	It is more important for students to be able to reach the answer quickly in mathematics than to be able to explain their answers by reasoning.	II	11	7	3	5	4	3.53	1.48	12	8	1	4	5	3.60	1.54	3.57	1.51
6	To be fluent in math, students need to be able to communicate with other students.	I	4	7	7	7	5	3.10	1.31	5	6	7	6	6	3.07	1.39	3.08	1.35
7	I want my students to master basic mathematical operations before solving complex problems.	II	4	3	5	9	9	3.53	1.38	4	4	3	10	9	3.53	1.42	3.53	1.40
8	I encourage students to explain their strategies.	I	4	3	2	9	12	3.73	1.44	5	4	3	10	11	3.60	1.44	3.66	1.44
9*	When students are working on mathematics problems, I put more emphasis on getting the correct answer than on the process followed.	II	11	9	2	6	2	3.70	1.34	12	10	3	4	1	3.93	1.17	3.81	1.25
10*	Fluency is something that develops naturally, it doesn't need to be taught specifically.	III	5	11	5	4	5	3.23	1.36	4	13	5	4	4	3.30	1.26	3.26	1.31

3. Findings

In this section, the answers given by the mathematics teachers to the two open-ended questions and semi-structured questions in the questionnaire were coded and presented.

3.1. Findings on the definition of mathematical fluency

The findings presented in this section are composed of the answers given by the mathematics teachers to the second open-ended question (*Write the three words that best describe mathematical fluency, in order?*) in the questionnaire and the first question in the semi-structured interview protocol. When teachers were asked to write the three words that best described fluency, they wrote 34 different words. The distribution of the words preferred by the teachers is given in Table 5.

Table 5. Distribution of the first word and the first three words to describe it best

The first word that best describes	Frequencies	Three words that best describes	Frequencies
Efficient/effective	9	Efficient/effective/productive	27
Flexible	8	Flexible /changeable/varied	20
Strategy/method	8	Strategy/method/way	20
Understanding	7	Understanding	19
Correct/faultless	6	Correct/faultless	18
Again/repetition	4	Speed	14
Memorization	4	Remembering / recalling	10
Speed	3	Again/repetition/ iteration	8
Remembering	3	Memorization	8
Confidence	3	Calculation	8
Calculation	2	Transfer/transition	7
Transfer	1	Confidence/believing/courage	6
Others	2	Logic/reason	6
Total	60	Others (curiosity, proof, comment, etc.)	9
		Total	180

When Table 5 is examined, the most common word used by teachers to describe fluency is "efficient/effective", while they frequently use the words "flexible, strategy, understanding and correct". While the number of teachers who accept the words "remembering and speed" as the first word is very small, the number of teachers who write these words as the second or third word is more. However, it is an interesting result that the words "confidence/believing/courage" are less preferred. It was determined that 9 teachers preferred very different words, especially in their findings about the three words that best describe them. However, in some quotations from the interviews with the teachers regarding the definition of "mathematical fluency", the words selected in Table 6 and the words in Table 5 overlap.

Table 6. Quotations and keywords for teachers' definitions of mathematical fluency

Quotations by teachers	Coded Words
Ö01: <i>Being able to understand what you read quickly and be able to act in mind. I think it is related to being able to reason with confidence...</i>	Speed, Logic, Confidence, Reasoning
Ö02: <i>We can define it as a transition or transfer from basic skills to complex skills. In other words, it is about applying skills to new learning and recognizing different strategies/ways...</i>	Transition/transfer, Strategy/way
Ö03: <i>Applying processing skills in daily life in efficient and different methods, making associations and making connections...</i>	Efficient, Method, Associations/connections
Ö04: <i>Ability and practicality to operate in an organized or efficient manner. Or, fluency is achieved with plenty of practice in every subject where mathematical definitions are well understood. For example, without fluency, students struggle...</i>	Regular, Efficient, good understanding,
Ö05: <i>I think it can be calculations or operations or problem situations, executing it in a flexible, accurate, efficient and appropriate way... It is also the ability to bring information or concepts to mind immediately and use them quickly... Of course, it is also important to trust oneself in this process. Students repeating processes such as these both gain speed and understand the process.</i>	Flexible, Accurate, Efficient, Appropriate, Recall, Speed, Confidence, Repetition, Understanding

Table 6 continued

Ö₀₆ : <i>It is the student's ability to perform fast operations in an understandable way and to repeat or remember this skill...</i>	Speed, Recall/remember, Repeat
Ö_{L1} : <i>It is the state of the student knowing why he is doing what he is doing, that is, understanding or comprehending...</i>	Understanding
Ö_{L2} : <i>Ability to act quickly. Correct and effective application by choosing appropriate methods. For example, the concepts became more difficult when I learned when I started high school. But I still had fluency with numbers... Because I knew how to use numbers and how to use math. But then I had to change a bit because these concepts were more difficult. So it made me work a little more...</i>	Speed, Method, Effective
Ö_{L3} : <i>Implementation of the learned mathematical skill in an error-free, meaningful, understandable, efficient and flexible way. But fluency depends on the content. I may be a fluent reader, but if you give me a physics book, I'll slow down and lose my fluency. I think that's the challenge of the text before you, whether it's a mathematical text or a literacy text...</i>	Accurate/correct, Meaningful, Efficient, Flexible, Reading Comprehension
Ö_{L4} : <i>The process of searching for solutions to some mathematical problem or question in an efficient and flexible way. Making comments with the help of existing information, producing new solutions...</i>	Efficient, Flexible, Commenting
Ö_{L5} : <i>The way from the problem to the solution. The ability to reach a step-by-step result or to perform calculations in the face of a problem-question-situation...</i>	Way, Systematic, Calculation
Ö_{L6} : <i>Students can understand the logic of the subject in interaction with each other and answer questions such as why, why, how I did it, meaningful learning and knowledge sharing. In other words, it's the ability to express why you did a certain thing, how you arrived at the answer... a lot of fluency for me is about understanding and adapting. So easily to the next...</i>	Understanding, Adapting, Communication, Logic, Knowledge sharing

In addition, when the quotes from the teachers in Table 6 are examined, it is understood that mathematical fluency is a complex concept for teachers. In particular, the expressions used by postgraduate teachers in their definitions of mathematical fluency and the words discovered by analyzing show parallelism with the definitions in the literature. For example, the statements of the teachers of Ö₀₃ and Ö_{L3} as “*To use the learned mathematical skill in an error-free, meaningful, understandable, efficient and flexible way...*” and “*To apply the processing skills in daily life in efficient and different ways, to associate and establish connections...*” are in line with the literature definitions. It was determined that some of the teachers gave examples from their own educational experiences (Ö_{L2}) and social experiences (Ö₀₃) to explain the concept of "mathematical fluency". Teacher Ö_{L3} stated that fluency was related to the content, while teacher Ö₀₄ stated that students who did not have fluency would have difficulties.

3.2. Findings on basic features of mathematical fluency

As a result of the interviews with mathematics teachers, fifteen different codes related to the basic features of mathematical fluency were created and presented in Table 7.

Table 7. Findings from teachers' views on the basic features of mathematical fluency

Codes	Teachers											
	Ö ₀₁	Ö ₀₂	Ö ₀₃	Ö ₀₄	Ö ₀₅	Ö ₀₆	Ö _{L1}	Ö _{L2}	Ö _{L3}	Ö _{L4}	Ö _{L5}	Ö _{L6}
Spend time and persistence in repetition and practice	x			x								
Be patient and persevering	x											
Conceptual understanding (Knowing where to do what and interpreting)	x	x			x		x	x		x	x	
Developed sense of numbers and calculation skills		x			x	x					x	
Developed reasoning skills			x		x		x	x				
Developed problem-solving skills			x									x
Developing different solving strategies		x	x		x	x	x		x			x
Being able to calculate quickly and interpret these calculations (control the process and give feedback)			x	x					x			x
Reading comprehension and interpretation			x		x							

Table 7 continued

Ability to organize transactions and procedures in a planned, systematic and orderly manner	x		x	x	x		x	x	x
Developing effective and accurate solutions				x			x		x
Ability to produce practical solutions	x		x				x		
Ability to make associations between information or concepts	x	x						x	
Creative thinking							x		x
Keep in touch with your teacher and peers					x				

When Table 7 is examined, the teachers of \ddot{O}_{01} , \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L2} , \ddot{O}_{L4} , \ddot{O}_{L5} emphasized that conceptual understanding is one of the main features of mathematical fluency. For example, the statement of \ddot{O}_{L1} teacher "The student acts knowing where to do what and with what method to solve the question... He can answer the questions why I did it, why I did it. Students who already understand make their calculations effective, that is, regularly and in a planned manner. By logical reasoning, he is able to tell different methods effectively and efficiently, even about questions he does not know. He can communicate with his friends and teachers..." indicates conceptual understanding. Teachers of \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{06} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L3} , \ddot{O}_{L6} emphasized that one of the main features of mathematical fluency is the ability to develop different solution strategies/methods. For example, \ddot{O}_{05} teacher's statement "To master basic operations, to define and interpret concepts correctly, to use the steps of operation correctly and effectively. Reaches the solution systematically and accurately by paying attention to the solution steps. Ability to develop more than one solution. Judging understanding by understanding what you read..." shows this situation. Teachers of \ddot{O}_{L2} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{06} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L3} , \ddot{O}_{L4} , \ddot{O}_{L6} emphasized that one of the main characteristics of mathematical fluency is the ability to organize operations and procedures in a planned, systematic and regular way. For example, \ddot{O}_{L4} stated that the teacher should have the ability to organize the operations and procedures in a planned, systematic and regular way, from the statement "He takes the necessary actions in a followable and descriptive manner without skipping a step. This is to operate efficiently, effectively and flexibly. In addition, he can use mathematical knowledge without error by transferring it between subjects. This transfers information in an understandable way. He can only do this by learning the real meanings of the concepts..." \ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{04} , \ddot{O}_{L3} , \ddot{O}_{L6} teachers considered being able to make calculations quickly and interpreting these calculations (controlling the process and giving feedback), while the teachers of \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{06} , \ddot{O}_{L5} considered developing a sense of number and calculation skills as one of the basic features of mathematical fluency. For example, these two basic features were emphasized in the expression of teacher \ddot{O}_{03} as "He can calculate and interpret quickly... Ability to practice practice. A student who can control the process and give feedback when necessary. In this sense, students should improve themselves with continuous practice and training and accelerate well. This acceleration leads to the development of different solution methods..." Some of the teachers associated the basic features of mathematical fluency with the development of mathematical skills such as reasoning (\ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L2}), association (\ddot{O}_{01} , \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{L3}), problem solving (\ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{L5}), and communication skills (\ddot{O}_{L1}). they have described. Some of the teachers described the basic features of mathematical fluency by associating them with the development of reasoning (\ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L2}), association (\ddot{O}_{01} , \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{L3}), problem solving (\ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{L5}), and communication (\ddot{O}_{L1}) skills. In addition, a few of the teachers defined the characteristics of mathematical fluency as spending time on repetition and exercises, being patient and determined, understanding and interpreting what is read, developing effective and correct solutions, producing practical solutions, and thinking creatively.

Otherwise, a question was asked to the teachers about whether the features related to mathematical fluency were the same for each grade level, and while nine of the teachers (\ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{04} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{06} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L2} , \ddot{O}_{L3} , \ddot{O}_{L6}) answered no and two of them (\ddot{O}_{01} , \ddot{O}_{L4}) answered yes, one teacher (\ddot{O}_{L5} : I don't think, I guess not everyone is the same...) was undecided. For example, \ddot{O}_{02} teacher who answered no explained why she said no as follows: "Because each grade level has different gains, features related to mathematical fluency vary according to grade levels. However, if the foundations of mathematical fluency are laid well from an early age, it will be easier to adapt the features in the next grade levels...", while \ddot{O}_{L4} teacher who answered yes explained why she said yes as follows: "I think it's the same for. Because I think that in order for students to have this feature, there should be a classroom environment where students can easily express their thoughts, communicate effectively and be open to questioning..."

3.3. Findings on whether math fluency is more likely to be seen when students are speaking or writing

The findings obtained from the teachers regarding whether mathematical fluency can be seen more when students are speaking or writing were evaluated by creating three different codes as in Table 8.

Table 8. Findings on whether fluency can be seen more when students are speaking or writing

Codes	Teachers
More when talking (Speaking > Writing)	$\ddot{O}_{02} - \ddot{O}_{L4}$
More when writing (Writing > Speaking)	$\ddot{O}_{06} - \ddot{O}_{L1}$
I'm undecided	$\ddot{O}_{01} - \ddot{O}_{03} - \ddot{O}_{04} - \ddot{O}_{05} - \ddot{O}_{L2} - \ddot{O}_{L3} - \ddot{O}_{L4} - \ddot{O}_{L6}$

When Table 8 is examined, it has been determined that 8 teachers are undecided about whether mathematical fluency can be seen more when students are speaking or writing. For example, \ddot{O}_{05} teacher attributed the reason for his indecision to the mathematical context or content and made a statement as follows: "It can be seen in both. I think it would not be right to classify which one is more visible... Written texts are reflections of discourses anyway. I think the mathematical context is important here and it depends on the mathematical context..." Similarly, it was understood that the teacher was undecided from the statement of \ddot{O}_{L6} teacher as "Multiple participation and many ideas while speaking, individuality and more limited ideas when writing. Therefore, I have no idea about which one will be seen more...". On the other hand, \ddot{O}_{02} teacher emphasized that mathematical fluency can be seen more when students are speaking in her statement, "If you are more fluent while speaking, the act of writing will be efficient. Don't talk to him first...". On the contrary, the teacher of \ddot{O}_{L1} emphasized that mathematical fluency can be seen more when students write, in his statement "I believe that mathematics can be seen more when writing rather than speaking. We can see this more in their written solutions. As problems become more complex, fluency in written solutions becomes more important. Thus, the solution can be followed and understood..."

3.4. Findings on the relationships between mathematical fluency and other mathematical skills

Most of the teachers (all of the teachers except \ddot{O}_{L5}) stated that there is a relationship between mathematical fluency and mathematical skills such as reasoning, communication, association and problem solving. For example, from the statement of the teacher \ddot{O}_{05} , a doctoral student, as "They are all related. Understanding what is meant in the question or problem is the most important factor, the one who understands moves more fluently. Then, the method is developed by reasoning, or the current situation can be associated with previous topics or questions, and students with good problem-solving skills reach a conclusion quickly... In other words, those who are fluent internalize these skills better and move faster through the process. Conversely, students who are good at these skills can develop faster, more efficient, flexible, accurate calculations or methods in mathematics", it is understood that mathematical fluency affects mathematical skills such as reasoning, communication, association and problem solving, and students who are more competent in mathematical skills are more fluent in mathematics. Similarly, the statement of master's student \ddot{O}_{L3} as "Fluency has an important place in solving complex problems when necessary by using all these skills together... Fluency in both thought and written mathematical operations enables reasoning on that subject, making associations, solving the problem and understanding the solution. Likewise, having these skills and using them by organizing them increases the fluency of his mathematical work. In this sense, I think it is directly related. Mathematical fluency is more evident in students with these skills..." revealed that the teacher emphasized the relationship between mathematical fluency and other mathematical skills. In addition to this, it was understood that the teacher \ddot{O}_{L5} stated that "Communication is not possible, but it is directly related to others. Because I'm thinking of communicating, I'm thinking of fluency, I can't connect. Maybe there is, I don't know... I'm not sure. But there is a relationship with others...", and that the teacher hesitates whether there is a relationship between communication skills and mathematical rationality, and emphasizes that there is a relationship between other mathematical skills and fluency. As a result, almost all of the teachers stated that there is a relationship between mathematical fluency and other mathematical skills.

3.5. Findings on the relationship between mathematical fluency and "understanding"

When the data showing that there is a relationship between mathematical fluency and "understanding" were examined, the perspectives of the teachers were evaluated by creating three different codes as in Table 9.

Table 9. Findings on whether there is a relationship between mathematical fluency and "understanding"

Codes (relationship and direction)	Teachers
Understanding \Leftrightarrow Mathematical fluency	$\ddot{O}_{05} - \ddot{O}_{L6}$
Understanding \Rightarrow Mathematical fluency	$\ddot{O}_{01} - \ddot{O}_{02} - \ddot{O}_{03} - \ddot{O}_{04} - \ddot{O}_{06} - \ddot{O}_{L1} - \ddot{O}_{L2} - \ddot{O}_{L4} - \ddot{O}_{L3}$
Understanding \Leftarrow Mathematical fluency	\ddot{O}_{L5}

Meaning of symbols: \Leftrightarrow : strong bidirectional relationship; \Rightarrow : strong one-way relationship; \Leftarrow : one-way weak relationship; ?: undecided whether there is a relationship

It was determined that two of the teachers emphasized that there was a strong bidirectional relationship between these two concepts, nine of them emphasized that there was a strong one-way but weak relationship in the opposite direction, and one teacher was undecided. For example, it was determined that the teacher \ddot{O}_{L6}

emphasized that there is a strong bidirectional relationship between comprehension or comprehension and fluency in his statement "Unfortunately, there is no fluency without comprehension. It is thought that only the operations that are put into a pattern are learned by rote... Besides, the fluent one also comprehends more quickly. I think there is a lot of two-way interaction...". \ddot{O}_{O3} teacher's statements such as "Sometimes I think that my best children I teach really have a deep understanding and lack fluency. So I think they can understand without being fluent. But I don't think it could work the other way around..." and \ddot{O}_{L1} teacher's statements such as "If they understand or comprehend, they can do more fluent operations or calculations. Just like in Turkish, they can speak more effectively if they are mothers. I am of the opinion that the reverse is partially true. That is, one can understand without fluency, but one cannot be fluent without understanding without understanding. For example, I think a student can achieve fluency by grasping a mathematical structure. But for basic mathematical operations, we can sometimes see that he can operate fluently without understanding the logic...", it has been determined that teachers emphasize that understanding affects mathematical fluency a lot, but mathematical fluency does not affect comprehension much. On the other hand, it was determined from the statement of the \ddot{O}_{L5} teacher, "If we adapt it without speaking Turkish. I am not sure if understanding or comprehension alone is enough to speak fluently... An extrovert can convey what he understands or comprehends. I don't think it needs to be fluent. So comprehension seems to affect fluency, but I can't quite think how the other affects it..." that the teacher was insufficient in defining the relationship between these two concepts and was undecided in determining the direction of the relationship. As a result, most of the teachers stated that understanding is necessary for being mathematically fluent, but the effect of mathematical fluency is less on understanding.

3.6. Findings on learning domains associated with mathematical fluency

The findings presented in this section are composed of the answers given by the mathematics teachers to the second open-ended question in the questionnaire and the sixth question in the semi-structured interview protocol. Table 10 was created by analyzing the answers given by the teachers to the second open-ended question (*Which subject/learning area comes to your mind first when you hear the word fluency?*) in the questionnaire.

Table 10. Findings from 60 teachers on learning areas associated with mathematical fluency

Elementary mathematics teachers		Secondary school mathematics teachers	
Learning area/subject	Frekans	Learning area/subject	Frekans
Numbers and operations	22	Numbers and algebra	26
Algebra	6	Geometry	1
Geometry	-	Data counting and probability	3
Data processing and probability	2		

When Table 10 is examined, it is understood that secondary school teachers generally associate mathematical fluency with numbers and operations learning, while high school teachers mostly associate numbers and algebra learning. However, as can be seen from the data in Table 11, which was obtained from the 12 teachers interviewed, it was determined that most of the mathematics teachers emphasized that the only area where mathematical fluency is seen is not the area of learning numbers and operations, but that mathematical fluency can be seen in different subjects or learning areas.

Table 11. Findings from 12 teachers on learning areas associated with mathematical fluency

Codes	Teachers
No	\ddot{O}_{O1} - \ddot{O}_{O2} - \ddot{O}_{O3} - \ddot{O}_{O4} - \ddot{O}_{O5} - \ddot{O}_{O6} - \ddot{O}_{L1} - \ddot{O}_{L2} - \ddot{O}_{L3} - \ddot{O}_{L6}
Yes	\ddot{O}_{L4}
Indecisive	\ddot{O}_{L5}

While all elementary mathematics teachers stated that mathematical fluency can be seen in learning areas other than numbers and operations, one secondary school mathematics teacher stated that mathematical fluency can only be seen in the areas of learning numbers and algebra. For example, \ddot{O}_{O3} teacher's statement "Basic mathematical operations are encountered in almost every mathematical occupation. Therefore, fluency in this matter is important. But it is not limited to just here. Using skills such as basic processing skills, reasoning skills, and problem solving skills together, creating appropriate solutions to the problem situation or making explanations are also areas where fluency can be seen. We can see this in fields such as Geometry and Statistics. In other words, fluency should not only mean error-free operation. Just like knitting a knitting, the person should gather the information he has acquired for the mathematical situation in front of him and express this combination verbally and in writing..." revealed that the teacher emphasized that mathematical fluency can be seen in different learning areas. However, it is understood from the expression "I think yes. It has a lot to do with learning numbers and algebra. This is natural. Because the first learning area at all grade levels is numbers and operations learning area. Since the subject of numbers is related to all learning areas, I think mathematical fluency is limited to learning numbers and algebra, especially in high school..." by the teacher of \ddot{O}_{L4} , that the

teacher emphasized the field of learning numbers and algebra. \ddot{O}_{L5} mathematics teacher was undecided on this question, as in other interview questions, and answered, "I don't know... I don't know much... Reading comprehension must be absolutely necessary..." As a result, although the majority of teachers claim that there is a greater relationship between mathematical fluency and the learning domain of numbers and operations (numbers and algebra), it has been understood from the interviews that mathematical fluency can be seen in different learning domains.

3.7. Findings on whether Turkish fluency affects mathematical fluency

All of the teachers stated that there is a very important and deep relationship between mathematical fluency and Turkish fluency, and they emphasized that Turkish fluency greatly affects mathematical fluency. For example, the statement of the master's student \ddot{O}_{O3} that "Most of the mathematical pursuits involve Turkish explanations, instructions or daily life scenarios. If the student understands these expressions correctly, they transfer these expressions to the world of mathematics and develop solutions. It is possible for an individual who does not understand what he reads correctly and fluently to make mistakes. Fluency in Turkish is also important in order to explain the result or solution strategy he has reached. Good Turkish fluency affects mathematical fluency positively..." reveals this situation. Similarly, teacher \ddot{O}_{L6} explained that Turkish fluency positively affects mathematical fluency as follows: "People who can express their reading comprehension and understanding in Turkish will also express themselves more easily in mathematics. A person who is not fluent in Turkish is negatively affected because he or she cannot understand and express mathematics. In other words, reading comprehension and mathematization are important. Those who understand the situation make fluent calculations more meaningfully and reason more accurately, efficiently and effectively..." As a result, all of the teachers stated that Turkish fluency is important for the development of mathematical fluency.

4. Discussion and Results

Before discussing the data obtained from the semi-structured interviews and open-ended questions, the data in Table 4 of all the teachers obtained from the 5-point Likert-type questionnaires were interpreted and then these data were discussed together with the data obtained from the interviews.

From the answers given to the questionnaire items, it is understood that both elementary and secondary school mathematics teachers generally speak the same language about mathematical fluency. For example, it is understood that mathematics teachers in both groups are undecided about the fact that mathematical ideas can be discovered by students, communication skills are important for students to be fluent in mathematics, fluency does not develop naturally and should be taught. One of these ambivalences differs from Boaler's (2016) idea that fluency is something that needs to be learned and taught. In addition, it was determined that the majority of mathematics teachers agreed that students may still not understand concepts even if they are mathematically fluent, that students need to master basic mathematical operations before solving complex problems, and that it is important to encourage students to explain their strategies. Similarly, it was determined that the teachers in both groups did not agree with the questionnaire items that the students' ability to reach the answer quickly in mathematics is more important than their ability to explain their answers by reasoning, or that teachers give more importance to finding the right answer than the process followed when students are working on mathematical problems. This reveals that understanding is more important than quick recall (Cartwright, 2018). However, it was understood that primary school mathematics teachers agreed with the item "A lot of things in mathematics must be accepted and remembered as perfectly correct", but secondary school mathematics teachers were undecided. It was determined that secondary school mathematics teachers agreed with the item "Mathematical fluency depends on students' capacity to remember procedures", but primary school mathematics teachers were undecided. As a result, the questionnaire items showed that both teachers had different beliefs (between each other) and teachers (within themselves) had complex beliefs that matched different ends of the traditional and contemporary spectrum.

While the most preferred word by the teachers who wrote 34 different words to describe mathematical fluency was "efficient/effective", they also frequently used the words "flexible, strategy and correct". The words used are consistent with the definitions of fluency (effective, flexible, efficient (appropriately)) in the literature (Kilpatrick et al., 2001; Watson & Sullivan, 2008). For example, these words are compatible with Watson and Sullivan's (2008) definition of mathematical fluency, which includes students' ability to apply procedures flexibly, accurately, efficiently and appropriately. One of the words most preferred by the teachers is the words "understanding". As a matter of fact, in many definitions of mathematical fluency, the relationship between these concepts and fluency is frequently emphasized (Boaler, 2015; Hiebert, 1999; McClure, 2014; Watson & Sullivan, 2008). The number of teachers who prefer the words "remembering and speed" is quite low. According to the results of the questionnaire, the number of teachers who think that students' ability to reach the answer quickly in mathematics is more important than their ability to explain their answers by reasoning is quite low. These two data are parallel to each other. However, speed and quick recall are the first words to look for in fluency. Although definitions of fluency outside of mathematics do not associate fluency with speed or recall,

fluency in mathematics is often considered synonymous with speed or rapid recall (Ramos-Christian et al., 2008; Wong & Evans, 2007). Similarly, teachers preferred the words "confidence/believing/courage" less. Although the procedural fluency, which is one of the components of Kilpatrick et al. (2001) related to mathematical competences, is associated with productive disposition, it is an interesting result that the words "confidence/believing/courage" are less preferred. In addition, the data obtained from the interviews with the teachers regarding the definition of "mathematical fluency" and the data obtained from the questionnaire items match. For example, the fact that teachers are indecisive about the questionnaire items and that mathematical fluency in quotations is a complex concept for teachers coincide. Some of the teachers connected the concept of "mathematical fluency" with their own learning, social experiences, classroom practices and what their students were doing to confirm their perspectives. In other words, teachers' perspectives on mathematical fluency were influenced by both internal factors (their own educational experiences and personal knowledge and content and pedagogical beliefs) and external factors (students' knowledge in their classroom, social experiences, and school context).

The opinions of teachers about the basic features of mathematical fluency and the results of studies in the literature show parallelism. More than half of the teachers stated that conceptual understanding (don't question where to do what, how to solve the question, why you prefer this solution or do it), being able to develop different solution strategies/methods, and having the ability to organize procedures in a planned, systematic and orderly manner are the basic features of mathematical fluency. According to McCluer (2014), understanding why students use certain strategies and knowing when it is appropriate to use different methods are the main features of mathematical fluency. Approximately one-third of the teachers considered being able to calculate quickly and interpret these calculations (controlling the process and giving feedback), having a sense of number and developed calculation skills as one of the main features of mathematical fluency. Some of the teachers defined the basic features of mathematical fluency by associating them with the development of mathematical skills such as reasoning, association, problem solving and communication skills. A similar perspective was obtained from the survey data, which is in line with Kilpatrick et al.'s (2001) framework of nested mathematics competencies. In addition, a few of the teachers defined the characteristics of mathematical fluency as spending time on repetition and exercises, being patient and determined, understanding and interpreting what is read, developing effective and correct solutions, producing practical solutions, and thinking creatively. In this sense, the data obtained showed that teachers made a clear distinction between students who they thought were fluent and students who were not fluent. For example, stating that students who have procedural fluency or learn content by rote are not really fluent (Cartwright, 2018) actually shows why conceptual understanding is important in mathematical fluency. The students, whom the teachers thought to be fluent, had procedural knowledge as well as knowing what to do in the processes and which strategies were more efficient in different situations. These data obtained as a result of the interviews showed that the teachers comprehensively listed many basic features related to mathematical fluency. For example, teachers often used similar words regarding the strategic competences students exhibit (effective, different, multiple choice), the conceptual understanding they convey (understanding, connecting, explaining), and the adaptive reasoning they use (transfer, work on mistakes, self-correction). These features have been described by Kilpatrick et al. (2001) overlaps with their intertwined mathematical competences. In addition, a question was asked to the teachers about whether the characteristics related to mathematical fluency were the same for each grade level, and nine of the teachers answered no and two of them answered yes, while one teacher was undecided.

It was determined that the majority of the teachers interviewed were undecided about whether mathematical fluency can be seen more when students are speaking or writing. As a matter of fact, this situation coincides with the indecision of the teachers in the questionnaire items. In addition, two of the teachers emphasized that mathematical fluency can be seen more when students are speaking, while the other two teachers emphasized that mathematical fluency can be seen more when students are writing. Most of the teachers stated that there is a relationship between mathematical fluency and mathematical skills such as reasoning, communication, association and problem solving. For example, it was determined that one of the teachers emphasized that mathematical fluency affects mathematical skills such as reasoning, communication, association and problem solving, while those who are more competent in mathematical skills can progress more fluently in mathematics. However, it was understood that a teacher hesitated whether there was a relationship between communication skills and mathematical rationality, and emphasized that there was a relationship between other mathematical skills and fluency.

Teachers stated that understanding is important in being mathematically fluent, but the effect of mathematical fluency is less on understanding. It was determined that two of the teachers emphasized that there was a strong bidirectional relationship between these two concepts, nine of them emphasized that there was a strong one-way relationship but weak in the opposite direction, and one teacher was undecided. In other words, students may have mathematical fluency as part of strategic competence, but they may lack knowledge of when to use procedures as part of conceptual understanding (Cartwright, 2018). Kilpatrick et al. (2001) stated that students

who learn procedures without understanding typically cannot do more than apply the learned procedures, while those who learn by understanding can change or adapt the procedures to make them easier to use.

It is understood that elementary mathematics teachers generally associate mathematical fluency with numbers and operations learning, and secondary school mathematics teachers associate numbers and algebra learning more. However, it was determined that most of the mathematics teachers interviewed emphasized that numbers and operations are not the only area where mathematical fluency is seen, and that mathematical fluency can be seen in different subject or learning areas. While all of the elementary mathematics teachers interviewed stated that mathematical fluency can also be seen in learning areas other than numbers and operations, one secondary school mathematics teacher stated that mathematical fluency can only be seen in the areas of learning numbers and algebra. As a result, although the majority of teachers claim that there is a greater relationship between mathematical fluency and the learning domain of numbers and operations (numbers and algebra), it has been understood from the interviews that mathematical fluency can be seen in different learning domains.

All of the teachers stated that there is a very important and deep relationship between mathematical fluency and Turkish fluency, and they emphasized that Turkish fluency greatly affects mathematical fluency. Considering Newman's (1977) statement "*Being fluent and literate in English plays a vital role in a student's ability to read, understand, interpret and solve mathematical problems*", it may lead to saying that being fluent in Turkish is also important for mathematical fluency. However, it has been determined that the viewpoints of postgraduate teachers on mathematical fluency are in a broader perspective than other teachers.

5. Recommendations

Although the study was conducted with teachers from different provinces, the small sample size is an important limitation for this study. For this reason, increasing the number of teachers to whom data collection tools will be applied can provide a better analysis of their perspectives on the concept of mathematical fluency. In addition, although the data obtained from both the questionnaire and the interviews were shared in the study, observing classroom practices in the context of mathematical fluency can help to interpret the relationship between teacher understandings and teaching practices. Similarly, it is necessary to observe classroom practices in order to verify that the fluency characteristics specified by teachers are actually present in students. As the findings of this study belong to teachers only, it is important to conduct research in collaboration with teachers in future studies on mathematical fluency to observe students working on tasks, discuss their reasoning and strategies with students, and analyze student work samples for characteristics of fluency. Such studies will also help teachers validate their concepts of mathematical fluency with student behavior.

Matematik Öğretmenlerinin Matematiksel Akıcılık Kavramından Anladıkları

1. Giriş

Akıcılık, bir öğrencinin okuma yeteneğini tanımlamak için yaygın olarak kullanılan bir kavram olmasına rağmen, bu kavramın matematik eğitiminde kullanımı oldukça yenidir. İlkokul sınıflarında akıcılık; okuryazarlık ve dil edinimi yönleriyle ilişkilendirilmiş, bu nedenle akıcı okuma, öğretmenler tarafından yaygın olarak kullanılan bir terim haline gelmiştir (Kuhn & Stahl, 2003). Farklı disiplinlerde ise akıcılık; kolaylıkla icra etme, sorunsuz veya akıcı konuşma, kolayca değiştirilebilir veya uyarlanabilir olarak farklı şekillerde ifade edilmektedir (URL-1, 2021). Matematik dışındaki akıcılık tanımları genellikle akıcılığı hız ile ilişkilendirmemesine rağmen, matematikte akıcılık genellikle “hız veya hızlı hatırlama” ile ilişkilendirilmektedir (Ramos-Christian, Schleser & Varn, 2008; Wong & Evans, 2007).

Matematiği çevreleyen literatürde akıcılık genellikle prosedürel veya işlemsel akıcılık olarak tanımlanır (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; McClure, 2014; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014; Russell, 2000). Nitekim birçok araştırmacı matematiksel akıcılığı, Kilpatrick vd. (2001) yapılandırdığı matematiksel yeterlilik - kavramsal anlama, işlemsel akıcılık, stratejik yetkinlik, mantıksal muhakeme, verimli eğilim - çerçevesindeki “işlemsel/prosedürel akıcılık” kavramı ile tasvir etmektedir. Matematiksel akıcılığın yalnızca prosedürel olduğu görüşü, prosedürün öğretilmesi ile uyum içinde öğrenilmesi gereken matematiksel kavramının (nedeninin) anlaşılması arasında bir kopukluk yaratabilir (McClure, 2014). Örneğin, Kilpatrick vd. (2001) hesaplama prosedürlerine harcanan aşırı zamanın, öğrencinin matematiksel fikirleri anlamasını derinleştirme becerisine zarar verebileceğini belirtmiştir. Sullivan (2011) ise öğretmenlerin, “çalışma belleğindeki yükü azaltmanın ve böylece diğer matematiksel eylemler için daha fazla kapasiteye izin vermenin bir yolu olarak (s.7)” hesaplamada öğrencilerinin akıcılıklarını geliştirmeleri gerekliliğine vurgu yapmıştır. Foster’e (2014) göre öğrencilerin tüm enerjilerini hesaplama prosedürlerinden ziyade daha karmaşık görevleri çözmeye odaklamalarının, onların büyük resmi görmelerine, hangi stratejileri kullanacaklarını seçmelerine ve neden onları seçtiklerini açıklayabilmelerine olanak tanır. Bu anlamda öğrencilerin neden belirli stratejileri kullandıklarını anlamaları ve farklı yöntemleri kullanmanın ne zaman uygun olduğunu bilmeleri gerekir (McClure, 2014). McClure’a (2014) göre ne yaptığını anlamadan çok fazla uygulama yapan öğrenciler bu prosedürleri sıklıkla unuttur veya yanlış hatırlar.

Bununla birlikte Boaler (2015) matematikte akıcılığa daha bütüncül bir bakış açısıyla yaklaşmış ve akıcılığın sadece matematiği “bilmeyi” değil “yapmayı” da içerdiğini belirtmiştir. Watson ve Sullivan (2008) matematiksel akıcılığı, prosedürleri esnek, doğru, verimli ve uygun bir şekilde yürütmenin yanı sıra akla hemen gelen olgusal bilgi ve kavramlara sahip olma olarak ifade etmiştir. Fosnot ve Dolk (2001) matematiksel akıcılığı bir sayının nasıl oluşturulabileceğini ve ayrıştırılabileceğini bilmek ve bu bilgiyi problem çözmeye esnek ve verimli olmak için kullanmak olarak tanımlamıştır. Kilpatrick vd. (2001) ise matematiksel olarak akıcı olmada prosedürleri etkili, esnek ve doğru kullanımının esas olduğunu ifade etmiştir. Bu tanımlardan da anlaşılacağı üzere öğrencilerin sadece matematiksel kavramlara ilişkin bilgilerini geliştirmeleri değil, aynı zamanda bu bilgilerini matematiksel süreçlerle çalışarak sergilemeleri gerekir. Son yıllarda matematiği ezberlenmesi gereken bir dizi beceri olarak görme eğilimi, problem çözenin ön plana çıktığı ve öğrencilerin matematik öğrenirken kullandıkları matematiksel süreçlerin önemli olduğu öğretime doğru kaymaktadır (Anderson & Bobis, 2005; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Hem beceri hem de konu içeriği bilgisine sahip olmanın önemi, beceri ve bilgiyi çeşitli durumlarda kullanmak için gereken süreçlerle birlikte vurgulanır. Sonuç olarak matematiksel akıcılık hem prosedürleri gerçekleştirme becerisini hem de öğrenilen matematiğin anlaşılmasını içerirken, matematiksel yeterlilik, hem prosedürel hem de kavramsal olarak akıcı olmaktan beslenir.

Ancak matematik öğretimine ilişkin daha çağdaş yaklaşımlarda kavramsal anlamaya vurgu yapılmasına rağmen, sadece prosedürel akıcılığa odaklanılan geleneksel matematik öğretim yöntemlerinin kullanılması devam etmekte ve “hız için öğretim ve anlam için öğretim” ve varsa bunların ne gibi bir ilişkiye sahip oldukları konusunda tartışmalar halen sürmektedir (Handal & Herrington, 2003; Thomas, 2012; Yates, 2006). Öğrenciler genellikle matematiksel görevleri yerine getirirken geçtiği süreçlerin ne işe yaradığından çok prosedürel akıcılığa odaklandığından, süreçlere dair çok az veya hiç bilgi sahibi olmadan görevleri yerine getirirler (Hiebert, 1999; McClure, 2014). Özellikle “hızlı hatırlama” öğretmenlerin matematiği öğretme biçimlerini etkiler ve bu durum küçük yaşlardan itibaren öğrencilerde matematik kaygısına neden olma potansiyeline sahiptir (Ashcraft & Krause, 2007; Boaler, 2015). Ayrıca akıcılığı hızlı hatırlama ile ilişkilendirmek, öğretmenleri ve ebeveynleri her şeyden önce hızlı hatırlamaya değer vermeye teşvik edebilir (Bauer, 2013). Akıcılığı yalnızca prosedürleri ezberlemek ve gerçekleri hızlı bir şekilde hatırlamakla ilgili olarak görmeye ilgili sınırlamalar göz önüne alındığında, öğretmenlerin akıcılığı nasıl tanımladıkları konusunda daha fazla araştırma yapılması gerekmektedir. Ayrıca matematik eğitimi ile ilgili literatür incelendiğinde akıcılığın daha çok, prosedürel/işlemsel veya hesaplamalı akıcılık olarak tanımlandığı anlaşılmaktadır (Kilpatrick vd., 2001; McClure, 2014; NCTM, 2014; Russell, 2000). Bu tanımlamalarda yer alan “prosedürel, işlemsel veya

hesaplamalı gibi” terimler, öğretmenlerin akıcılığı belirlenmiş bir formülü takip edebilme veya matematikte hızlı bir şekilde hesaplama yapabilme olarak yorumlanmasını sağlayabilir (Cartwright, 2018). Bu dar bakış açısı, öğretmenlerin matematiği öğretme biçimini etkileyebilir. Bu nedenle öğretmenlerin bu kavram hakkındaki düşüncelerinin veya görüşlerinin belirlenmesi hem öğrencilerde matematiksel akıcılığı belirleme, izleme ve değerlendirme gibi özellikleri hem de gelecekteki öğrenim için ihtiyaç duyulan noktaları belirlemeye ışık tutacaktır. Ayrıca, matematikte akıcılık üzerine yapılan çalışmaların genel olarak öğrencilerle yürütülmesi (Finnane, 2004; Foster, 2013; Graven, Nieuwoudt, Laubscher & Dreyer, 2012; Russell, 2000; Stott, 2013) ve ülkemizde matematiksel akıcılık kavramına yönelik yapılan çalışmaların (Alptekin, 2019; Uysal, 2017) azalığı nedeniyle bu araştırmanın alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu bağlamda çalışmanın amacı, ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin “matematiksel akıcılık” kavramı ile ilgili düşüncelerini/görüşlerini keşfetmektir. Bu amaç doğrultusunda çalışma ile matematik öğretmenlerinin hem “matematiksel akıcılık” terimini nasıl tanımladıkları hem de bu kavram hakkındaki bilgi ve inançları belirlenmiştir.

2. Yöntem

Bu bölümde araştırmanın yöntemi, katılımcıları, veri toplama araçları, veri toplama süreci ve verilerin analizi ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

2.1. Araştırma Deseni

Matematik öğretmenlerinin “matematiksel akıcılık” kavramı ile ilgili bakış açılarını hem nicel hem de nitel olarak belirlemeyi amaçlayan bu çalışma, karma yöntem tipolojilerinden açıklayıcı sıralı desen tasarımına sahiptir. Bu tasarımın ilk aşamasında nicel veriler ikinci aşamasında nitel veriler toplanır ve analiz edilir, daha sonra ise verilerin yorumlanması esnasında birleştirme gerçekleşir (Creswell, 2013).

2.2. Çalışma Grubu

Çalışma Türkiye’nin farklı illerinde görev yapan toplam 60 (30 + 30) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenleri ile yürütülmüştür. Bu öğretmenlerin seçiminde tesadüfi olmayan örnekleme yöntemlerinden uygun veya elverişlilik (convenience) örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem araştırmaya hız kazandıran bir yöntemdir ve bu yöntemde araştırmacı, yakın ve erişilmesi kolay olan katılımcıları seçer (Dawson & Trapp, 2001). Öğretmenlerin tamamına online olarak tasarlanan anket formları uygulanmış ve bu anket formlarından elde edilen veriler dikkate alınarak seçilen 12 öğretmen ile sanal ortamlarda yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Ayrıca 12 öğretmenin seçiminde, çalışmanın amacı bağlamında bilgi açısından zengin durumları (lisans, yüksek lisans ve doktora yapmış öğretmenler) derinlemesine araştırma yapabilmek amacıyla amaçlı örnekleme tekniğinden de yararlanılmıştır. Mülakatların sunumunda ortaöğretim matematik öğretmenleri ÖL1 – ÖL6, ilköğretim matematik öğretmenleri ise ÖO1 – ÖO6 olarak kodlanmıştır. Mülakat yürütülen matematik öğretmenlerine ait demografik bilgiler Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Öğretmenlerin demografik bilgileri

Katılımcılar	Öğretmenlik Tecrübesi (Yıl)	Öğrenim Durumu	Öğretim yapılan sınıf düzeyi
Ö _{O1}	4	Lisans	5. ve 6. sınıflar
Ö _{O2}	12	Lisans	7. sınıflar
Ö _{O3}	8	Yüksek Lisans Öğrenci	7. ve 8. sınıflar
Ö _{O4}	22	Lisans	6. 7. ve 8. sınıflar
Ö _{O5}	17	Doktora Öğrenci	7. ve 8. sınıflar
Ö _{O6}	7	Lisans	5. ve 6. sınıflar
Ö _{L1}	24	Lisans	12. sınıflar
Ö _{L2}	13	Lisans	9. ve 10. sınıflar
Ö _{L3}	9	Yüksek Lisans Öğrenci	11. ve 12. sınıflar
Ö _{L4}	7	Lisans	9. ve 10. sınıflar
Ö _{L5}	2	Lisans	11. sınıflar
Ö _{L6}	18	Yüksek Lisans Bitti	12. sınıflar

2.3. Veri Toplama Araçları

Bu bölümde araştırmada kullanılan veri toplama araçları hakkında bilgi verilmektedir. Çalışmanın verileri, literatür (Cartwright, 2018) destekli hazırlanan bir anket formuyla ve yarı yapılandırılmış görüşmelerle toplanmıştır. Bu iki yöntem, matematik öğretmenlerinin anlayışları, düşünceleri, görüşleri, inançları ve tutumları hakkında doğrudan yanıtlar almanın önemli yolları olduğu için seçilmiştir (Harris & Brown, 2010). Anket, birincil kaynaklardan bilgi toplamak için hazırlanan sistematik bir soru formudur. Anket görece küçük ama temsiliyet özelliği yüksek örneklemeler üzerinden veri toplanılarak, hedef popülasyon hakkında belirli genellemeler yapmamızı sağlayan metotlardan biridir (İlhan & Deniz, 2021). Bu nedenle çalışmada 5’li likert

tipte [Kesinlikle Katılmıyorum (KK⁻), Katılmıyorum (K⁻), Kararsızım (K⁰), Katılıyorum (K⁺), Kesinlikle Katılıyorum (KK⁺)] 10 maddeden ve iki açık uçlu sorudan oluşan bir anket formu kullanılmıştır. Anket formundaki 10 madde üç farklı boyutu içermektedir (bkz. Tablo 4): (I) Öğrencilerin matematiksel fikirleri nasıl ilettikleri, (II) Öğretmenler matematiği, öğrencilerin matematik ve akıcılık gelişimi ile ilgili sabit bir bilgi birikimi (geleneksel) yerine dinamik bir konu (çağdaş) olarak mı görüyorlar?, (III) Öğretmenlerin düşünce yapılarının öğrencilerin matematik öğrenimini nasıl etkilediği. Bununla birlikte anketteki iki açık uçlu soru ise “Akıcılık denilince aklınıza ilk olarak hangi konu veya öğrenme alanı geliyor?” ve “Matematiksel akıcılığı en iyi tanımlayan üç kelimeyi sırasıyla yazınız?” şeklindedir. Matematik öğretmenlerin “matematiksel akıcılık” kavramı ile ilgili bakış açılarını daha derinlemesine incelemek amacıyla öğretmenlere yarı-yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşme tekniğinde, görüşmeyi yapan kişi daha önceden sormayı planladığı soruları içeren bir görüşme protokolü (bkz. Tablo 2) hazırlar ve görüşmeyi yapan kişi görüşmenin akışına göre başka sorularla veya alt sorularla görüşmenin akışını etkileyebilir (Karasar, 1994).

Tablo 2. Yarı-yapılandırılmış görüşme soruları

Görüşme Soruları	Ek sorular
1) Matematiksel akıcılığı nasıl tanımlarsınız?	Bu sorulara verilen cevapları daha da derinleştirmek amacıyla araştırmacı tarafından Niçin?, Nasıl?, Neden?, Hangi?, vb. sorular sorulmuştur.
2) Matematiksel akıcılığa sahip öğrencilerde hangi temel özellikler gözlemlenebilir?	
3) Matematiksel akıcılık öğrenciler konuşurken mi görülür, yoksa öğrencilerin yazılarında da görülebileceğini düşünüyor musunuz?	
4) Sizce akıcılık; akıl yürütme, iletişim kurma, ilişkilendirme, problem çözme gibi matematiksel beceriler ile ilişkili midir? Niçin?	
5) Sizce öğrenciler anlamadan/kavramadan akıcı konuşabilir mi? Ya da öğrencilerin akıcılık olmadan anlayabileceklerini düşünüyor musunuz?	
6) Bazı öğretmenler, sayı ve işlem kavramlarıyla akıcılığı daha çok ilişkilendirmiştir. Matematikte akıcılığın görüldüğü veya gerekli olduğu tek yer bu alan mı? Niçin?	
7) Bir öğrencinin Türkçe akıcılığı matematiksel akıcılığını etkiler mi? Etkilerse nasıl etkiler?	

2.4. Verilerin Analizi

Elde edilen verilerin analizinde ve sunulmasında ise araştırmaya açıklayıcı ve keşfedici bir yönelim sağlayan betimsel (descriptive) istatistik ve içerik analiz teknikleri kullanılmıştır. Betimsel istatistik, verilerin özetlenmesi ve araştırma sonuçlarının yorumlanması için kullanılan en iyi tekniktir. Bu nedenle çalışmanın anket formundaki maddelerin frekans, aritmetik ortalama ve standart sapma değerleri hesaplanmış, anket sorularına verilen cevapların değerlendirilmesinde ise Tablo 3’teki aralıklar dikkate alınmıştır. Aralıkların eşit olduğu varsayılmış, aritmetik ortalamalar için puan aralığı 0,80 olarak hesaplanmıştır (Puan Aralığı = (En Yüksek Değer – En Düşük Değer)/5 = (5 – 4)/5 = 4/5 = 0,80).

Tablo 3. 5’li Likert Ölçeğine Göre Aritmetik Ortalamaların Değerlendirme Aralığı

Aralıklar	Seçenekler
1,00 – 1,80	Kesinlikle Katılmıyorum (KK ⁻)
1,81 – 2,60	Katılmıyorum (K ⁻)
2,61 – 3,40	Kararsızım (K ⁰)
3,41 – 4,20	Katılıyorum (K ⁺)
4,21 – 5,00	Kesinlikle Katılıyorum (KK ⁺)

Nicel aşamada kullanılan son örneklem, daha sonraki nitel aşamada örneklem seçme için belirleyici olarak kullanılır (Kemper, Stringfield & Teddlie, 2003). Bu nedenle betimsel istatistik sonucu elde edilen Tablo 4’deki veriler dikkate alınarak yarı-yapılandırılmış görüşmelerin gerçekleştirileceği 12 öğretmen seçilmiştir.

Yarı-yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi nitel çalışmalarda sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemin amacı, araştırılan durumu betimlerken neden, nasıl sorularının yanıtlarını da ortaya koymaktır. Bu amaca da kavramsal kodlama ve sınıflama yoluyla temaların ve bu temalar arasındaki ilişkilerin ortaya çıkarılmasıyla ulaşıılır. Böylece, incelenen öğretmenlerle ilgili önceden açık ve belirgin olmayan anlamlar, görüşler, yaklaşımlar ve değerler ortaya çıkarılmış olur (Baki, 1994). Bu anlamda içerik analizi sürecinde ilk olarak matematik öğretmenlerinden elde edilen veriler transkript edilmiş, ardından yapılan transkriptler kodlanmıştır.

Tablo 4. Betimsel istatistikten yararlanarak anket maddelerinden elde edilen veriler

No	Anket maddeleri (*) işaretli olanlar olumsuz maddeler	Boyutlar	İlköğretim Matematik Öğretmenleri						Ortaöğretim Matematik Öğretmenleri						Genel			
			KK ⁻	K ⁻	K ⁰	K ⁺	KK ⁺	\bar{x}	σ	KK ⁻	K ⁻	K ⁰	K ⁺	KK ⁺	\bar{x}	σ	\bar{x}	σ
			Frekanslar						Frekanslar									
1	Matematikte birçok şey tamamen doğru kabul edilmeli ve hatırlanmalıdır.	III	2	6	5	15	2	3,60	1,20	3	8	5	12	2	3,31	1,36	3,46	1,28
2	Matematikselsel fikirler, öğrencilerin kendilerinin keşfedebilecekleri bir şeydir.	III	4	4	3	14	5	3,40	1,30	5	5	4	13	3	3,13	1,32	3,25	1,31
3	Matematikselsel akıcılık, öğrencilerin prosedürleri hatırlama yeterliliğine bağlıdır.	II	4	4	6	10	6	3,33	1,32	3	3	7	12	5	3,43	1,19	3,38	1,25
4	Öğrenciler matematiselsel olarak akıcı olabilir ancak yine de kavramları anlamayabilir.	II	4	2	6	11	7	3,50	1,31	3	3	5	12	7	3,57	1,25	3,53	1,28
5*	Öğrencilerin matematiselkte cevaba hızlı bir şekilde ulaşabilmeleri, muhakeme ederek cevaplarını açıklayabilmelerinden daha önemlidir.	II	11	7	3	5	4	3,53	1,48	12	8	1	4	5	3,60	1,54	3,57	1,51
6	Öğrencilerin matematiselkte akıcı olabilmeleri için diğer öğrencilerle iletişim kurabilmeleri gerekir.	I	4	7	7	7	5	3,10	1,31	5	6	7	6	6	3,07	1,39	3,08	1,35
7	Öğrencilerimin karmaşık problemleri çözmeden önce temel matematiselsel işlemlerde uzmanlaşmalarını isterim.	II	4	3	5	9	9	3,53	1,38	4	4	3	10	9	3,53	1,42	3,53	1,40
8	Öğrencileri stratejilerini açıklamaya teşvik ederim.	I	4	3	2	9	12	3,73	1,44	5	4	3	10	11	3,60	1,44	3,66	1,44
9*	Öğrenciler matematisel problemleri üzerinde çalışırken, izlenen süreçten çok doğru cevabı bulmalarına daha fazla önem veririm.	II	11	9	2	6	2	3,70	1,34	12	10	3	4	1	3,93	1,17	3,81	1,25
10*	Akıcılık doğal olarak gelişen bir şeydir, özel olarak öğretilmesi gerekmez.	III	5	11	5	4	5	3,23	1,36	4	13	5	4	4	3,30	1,26	3,26	1,31

2.5. Geçerlik ve Güvenirlik

Araştırmanın güvenilirliğini sağlamak için araştırma problemine uygun araştırma deseni seçilmiş ve araştırmadan elde edilen bulguları da bu doğrultuda sunulmuştur. Ayrıca toplanan verilerin kodlanmasından sonra katılımcı teyidi yapılarak, kodlamaların uygunluğu kontrol edilmiştir. Bu bağlamda kodlama süreci bir öğretim üyesi ile kontrollü olarak yürütülmüş ve bu araştırmacı tarafından kodlamalar “uygun” ve “uygun değil” biçiminde değerlendirilmiştir. Kodlayıcılar arası uyum %87 olarak hesaplanmıştır. Güler ve Taşdelen-Teker’e (2015) göre bu değer kodlayıcılar arası uyum için yeterlidir. Araştırmanın geçerliğini sağlamak için, öğretmenlerin ifadelerinden doğrudan alıntılara yer verilmiş ve çalışma grubu da dahil olmak üzere tüm süreç ayrıntılı olarak tasvir edilerek araştırmanın hangi durumlar altında tekrarlanabileceği yansıtılmıştır.

3. Bulgular

Bu bölümde matematik öğretmenlerinin anket formunda yer alan iki açık uçlu soruya ve yarı-yapılandırılmış sorulara verdikleri cevaplar kodlanarak sunulmuştur.

3.1. Matematiksel akıcılığı tanımına ilişkin bulgular

Bu kısımda sunulan bulgular, matematik öğretmenlerinin “*Matematiksel akıcılığı en iyi tanımlayan üç kelimeyi sırasıyla yazınız?*” şeklindeki açık uçlu soruya ve yarı-yapılandırılmış görüşme protokolündeki birinci soruya verdiği cevaplardan oluşturulmuştur. Öğretmenlerden akıcılığı en iyi tanımlayan üç kelimeyi yazmaları istendiğinde, öğretmenler 34 farklı kelime yazmışlardır. Öğretmenlerin tercih ettiği kelimelerin dağılımları Tablo 5’te verilmiştir.

Tablo 5. En iyi tanımlayacak ilk kelime ile ilk üç kelimenin dağılımı

En iyi tanımlayacak ilk kelime	Frekans	En iyi tanımlayacak üç kelime	Frekans
Verimli/etkili	9	Verimli/etkili/randımanlı	27
Esnek	8	Esnek/değişken/değişik	20
Strateji/yöntem	8	Strateji /yöntem/yol	20
Anlama	7	Anlama/anlayış	19
Doğru/hatasız	6	Doğru/hatasız/doğruluk	18
Tekrar	4	Hız	14
Ezber	4	Hatırlama/anımsama	10
Hız	3	Tekrar/yineleme	8
Hatırlama	3	Ezber(leme)/hızfetme	8
Güven	3	Hesaplama/işlem	8
Hesaplama	2	Transfer/geçiş	7
Transfer	1	Güven/inanma/cesaret	6
Diğerleri	2	Mantık/akıl	6
Toplam	60	Diğerleri (merak, ispat, yorum, vb.)	9
		Toplam	180

Tablo 5 incelendiğinde öğretmenlerin akıcılığı tanımlamak için kullandıkları en yaygın kelime “verimli/etkili” iken, “esnek, strateji, anlama ve doğru” kelimelerini de sıklıkla kullanmışlardır. “Hatırlama ve hız” kelimelerini birinci kelime olarak kabul eden öğretmenlerin sayısı çok az iken, bu kelimeleri ikinci veya üçüncü kelime olarak yazan öğretmenlerin sayısı ise daha fazladır. Bununla birlikte “güven/cesaret/inanma” kelimelerinin daha az tercih edilmesi ilginç bir sonuçtur. Özellikle en iyi tanımlayan üç kelime ile ilgili bulgularında 9 öğretmenin çok farklı kelimeleri tercih ettiği tespit edilmiştir. Ancak 180 kelime içerisinde 9 kelimenin az olduğu düşünüldüğünde öğretmenlerin genel olarak aynı fikirde oldukları söylenebilir. Bununla birlikte “matematiksel akıcılığın” tanımına ilişkin öğretmenlerle yapılan görüşmelere ait Tablo 6’daki bazı alıntılarda seçilen kelimeler ile Tablo 5’teki kelimeler örtüşmektedir.

Tablo 6. Öğretmenlerin matematiksel akıcılık ile ilgili tanımlarına dair alıntılara ve anahtar kelimeler

Öğretmenlere ait alıntılar	Kodlanan Kelimeler
Ö₀₁: Okuduğunu <i>hızlıca</i> anlayıp zihinden işlem yapabilme. Bence kendine <i>güvenerek muhakeme yapabilme</i> ile ilişkilidir...	Hız, Mantık, Güven, Muhakeme
Ö₀₂: Temel becerilerden karmaşık becerilere <i>geçiş</i> veya <i>transfer</i> olarak tanımlayabiliriz. Yani becerileri yeni öğrenmeye uygulayabilme ve farklı yollarla/stratejilerle tanıyabilme ile ilgilidir...	Geçiş/transfer, Stratejiler/yollar
Ö₀₃: İşlem becerilerini <i>verimli</i> ve <i>değişik yollarla</i> günlük hayatta <i>uygulaması, ilişkilendirmesi</i> ve <i>bağlantılar kurması</i> ...	Verimli, Farklı yol, İlişkilendirme
Ö₀₄: <i>Düzenle</i> ya da <i>verimli</i> işlem yapabilme kabiliyeti ve pratikliği. Veya matematik tanımlarının <i>iyi anlaşıldığı</i> her konunun bol uygulama yapılması ile akıcılık elde edilir. <i>Örneğin, akıcılık olmadan öğrenciler zorlanır</i> ...	Düzenli, Verimli, İyi anlaşılma

Tablo 6'nın devamı

Ö₀₅: <i>Bence hesaplamaları veya işlemleri ya da problem durumları da olabilir, esnek, doğru, verimli ve uygun bir şekilde yürütme... Ayrıca bilgileri veya kavramları hemen akla getirme ve bunları hızlı bir şekilde kullanma becerisidir... Tabi ki bu süreçte kişinin kendisine güvenmesi de önemlidir... Bu gibi süreçleri tekrar eden öğrenciler hem hızlanır hem de durumu kavrar...</i>	Esnek, Doğru, Verimli, Uygun, Hatırlama, Hız, Güven, Tekrar Kavrama
Ö₀₆: <i>Öğrencinin anlaşılır bir şekilde hızlı işlem yapabilme becerisi ve bu becerisini tekrar edebilme ya da hatırlayabilme durumudur.</i>	Hız, Hatırlama/tekrar
Ö_{L1}: <i>Öğrencinin neyi neden yaptığını bilmesi, yani anlaması veya kavraması durumudur...</i>	Anlama/kavrama
Ö_{L2}: <i>Hızlı işlem yapabilme yeterliliği. Uygun yöntemleri seçerek doğru ve etkili bir şekilde uygulama. Örneğin liseye başladığımda öğrendiğimde kavramlar daha da zorlaştı. Ama yine de sayılarla ilgili akıcılığım vardı... Çünkü sayıları nasıl kullanacağımı ve matematiği nasıl kullanacağımı biliyordum. Ama sonra biraz değişmek zorunda kaldım çünkü bu kavramlar daha zordu. Bu yüzden biraz daha çalışmamı sağladı...</i>	Hız, Yöntem, Etkili, Uygulama,
Ö_{L3}: <i>Öğrenilen matematiksel becerinin hatasız, anlamlı, anlaşılır, verimli ve esnek bir şekilde işe koşulması. Ancak akıcılık içeriğe bağlıdır. Akıcı bir okuyucu olabilirim ama bana bir fizik kitabı verersen yavaşlarım ve akıcılığım kaybolur. Bence bu, ister matematiksel metin isterse okuryazarlık metni olsun, önünüzdeki metnin zorluğudur...</i>	Hatasız, Anlamlı, Verimli, Esnek, Okuduğunu anlama
Ö_{L4}: <i>Bazı matematiksel problemlere ya da sorulara verimli ve esnek bir şekilde çözüm aramak. Bilgilerin yardımıyla yorum yapmak, yeni çözüm üretmek...</i>	Verimli, Esnek, Yorum yapma
Ö_{L5}: <i>Problemden çözüme giden yol. Problem-soru-durum karşısında adım adım sonuca erişebilme ya da hesaplama işlemlerini yapabilme yeteneği...</i>	Yol, Sistematik, Hesaplama
Ö_{L6}: <i>Öğrencilerin birbiri ile etkileşim içerisinde konunun mantığını anlayarak neden, niçin, nasıl yaptım gibi sorulara cevap verebilmesi, anlamlı öğrenmesi ve bilgi paylaşımı. Bir başka ifade ile belirli bir şeyi neden yaptığınızı, cevaba nasıl ulaştığınızı ifade edebilme yeteneğidir... benim için akıcılığın çoğu, anlamakla ve uyarlamakla ilgilidir. Yani kolay bir şekilde bir sonrakine...</i>	Anlama, Uyarlama, İletişim, Mantık, Bilgi paylaşımı,

Ayrıca öğretmenlere ait Tablo 6'daki alıntılar incelendiğinde, matematiksel akıcılığın öğretmenler için karmaşık bir kavram olduğu anlaşılmıştır. Özellikle lisansüstü eğitimi alan öğretmenlerin matematiksel akıcılıkla ilgili tanımlarında kullandıkları ifadeler ile analiz edilerek keşfedilen kelimeler literatürdeki tanımlarla paralellik göstermektedir. Örneğin Ö₀₃ ile Ö_{L3} öğretmenlerinin “*Öğrenilen matematiksel becerinin hatasız, anlamlı, anlaşılır, verimli ve esnek bir şekilde işe koşulması...*” ve “*İşlem becerilerini verimli ve değişik yollarla günlük hayatta uygulaması, ilişkilendirmesi ve bağlantılar kurması...*” şeklindeki ifadeleri literatür tanımları ile örtüşmektedir. Öğretmenlerden bazıları “matematiksel akıcılık” kavramını açıklamak için kendi eğitim deneyimlerinden (Ö_{L2}), sosyal deneyimlerden (Ö₀₃) örnek verdikleri belirlenmiştir. Ö_{L3} öğretmeni akıcılığın içerikle bağlantılı olduğunu belirtmişken, Ö₀₄ öğretmeni ise akıcılığa sahip olmayan öğrencilerin zorlanacağını ifade etmiştir.

3.2. Matematiksel akıcılığın temel özelliklerine ilişkin bulgular

Matematik öğretmenleri yapılan görüşmeler sonucunda matematiksel akıcılığın temel özellikleri ile ilgili on beş farklı kod oluşturulmuş ve Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7. Öğretmenlerin matematiksel akıcılığın temel özellikleri ile ilgili görüşlerinden elde edilen bulgular

Kodlar	Öğretmenler												
	Ö ₀₁	Ö ₀₂	Ö ₀₃	Ö ₀₄	Ö ₀₅	Ö ₀₆	Ö _{L1}	Ö _{L2}	Ö _{L3}	Ö _{L4}	Ö _{L5}	Ö _{L6}	
Ders tekrarına ve alıştırmalara zaman harcıyıp devamlılık gösterme	x			x									
Sabırlı ve azimli olma	x												
Kavramsal anlama (Nerede ne yapacağımı bilme ve yorumlama)	x	x			x		x	x		x	x		
Sayı hissi ve hesaplama becerisi gelişmiş olma		x			x	x						x	
Akıl yürütme becerisi gelişmiş olma			x		x		x	x					
Problem çözme becerileri gelişmiş olma			x									x	
Farklı çözme stratejileri geliştirebilme		x	x		x	x	x		x				x
Hızlı bir şekilde hesaplama yapabilme ve bu hesaplamaları yorumlayabilme (süreci kontrol edip geri dönütler verebilme)			x	x					x				x

Tablo 7'nin devamı

Okuduğunu anlama ve yorumlama	X	X						
İşlemleri ve prosedürleri planlı, sistematik ve düzenli bir şekilde organize edebilme	X		X	X	X	X	X	X
Etkili ve doğru çözümler geliştirebilme				X		X		X
Pratik çözümler üretebilme	X		X			X		
Bilgiler veya kavramlar arası ilişkilendirmeler yapabilme	X	X					X	
Yaratıcı düşünebilme						X		X
Öğretmeniyle ve akranlarıyla iletişim halinde olma					X			

Tablo 7 incelendiğinde \ddot{O}_{01} , \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L2} , \ddot{O}_{L4} , \ddot{O}_{L5} öğretmenleri matematiksel akıcılığın temel özelliklerden birinin kavramsal anlama olduğuna vurgu yapmışlardır. Örneğin \ddot{O}_{L1} öğretmenin “*Öğrenci nerde ne yapacağını, hangi yöntemle soruyu çözeceğini bilerek hareket ediyor. Neden yaptım, niçin yaptım sorularına cevap verebiliyor. Zaten kavrayan öğrenciler hesaplamalarını etkili yani düzenli ve planlı yapar. Mantıksal akıl yürüterek bilmediği sorular hakkında bile etkili ve verimli aynı zamanda farklı yöntemler söyleyebiliyor. Arkadaşları ve öğretmenleri ile iletişim halinde olabiliyor...*” ifadesindeki “nerde ne yapacağını, hangi yöntemle soruyu çözebileceğini, niçin bu çözümü tercih ettiğini veya yaptığını sorgulama” kavramsal anlamaya işaret etmektedir. \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{06} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L3} , \ddot{O}_{L6} öğretmenleri matematiksel akıcılığın temel özelliklerden bir diğerinin ise farklı çözüm stratejileri/yöntemleri geliştirebilme olduğuna vurgu yapmışlardır. Örneğin \ddot{O}_{05} öğretmenin “*Temel işlemlere hakim olma, kavramları doğru tanımlama ve yorumlama, işlem basamaklarını doğru ve etkili bir biçimde kullanma. Çözüm basamaklarına dikkat ederek sistematik ve doğru bir şekilde çözüme ulaşır. Birden fazla çözüm yolu geliştirebilme. Okuduğunu anlayarak, anladığını muhakeme etmek...*” şeklindeki ifadesi bu durumu göstermektedir. \ddot{O}_{L2} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{06} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L3} , \ddot{O}_{L4} , \ddot{O}_{L6} öğretmenleri ise matematiksel akıcılığın temel özelliklerden bir diğerinin işlemleri ve prosedürleri planlı, sistematik ve düzenli bir şekilde organize edebilme olduğuna vurgu yapmışlardır. Örneğin \ddot{O}_{L4} öğretmenin “*Adım atlamadan, takip edilebilir ve açıklayıcı bir şekilde gereken işlemleri yapar. Bu ise verimli, etkili ve esnek bir şekilde işlem yapmaktır. Ayrıca matematiksel bilgileri konular arasında transfer ederek hatasız bir şekilde kullanabilir. Bu bilgi transferini anlaşılır bir şekilde yapar. Bunu da ancak kavramların asıl anlamlarını öğrenerek yapabilir...*” ifadesinden öğrencilerin işlemleri ve prosedürleri planlı, sistematik ve düzenli bir şekilde organize edebilme yeterliliğine sahip olması gerekliliğini ifade etmiştir. \ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{04} , \ddot{O}_{L3} , \ddot{O}_{L6} öğretmenleri hızlı bir şekilde hesaplama yapabileme ve bu hesaplamaları yorumlayabilme (süreci kontrol edip geri dönütler verebilme), \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{06} , \ddot{O}_{L5} öğretmenleri ise sayı hissi ve hesaplama becerisi gelişmiş olmayı matematiksel akıcılığın temel özelliklerinden biri olarak görmüşlerdir. Örneğin \ddot{O}_{03} öğretmenin “*Hızlı bir şekilde hesaplama yapabilen ve yorumlayabilen. Pratik işlem yapabileme. Gerektiğinde süreci kontrol edip geri dönütler verebilen öğrenci. Bu anlamda öğrenciler sürekli alıştırmaya ve antrenmanlarla kendini geliştirmeli ve iyice hızlanmalıdır. Bu hızlanma ise farklı çözüm yöntemleri geliştirmeye yol açar...*” şeklindeki ifadesi ifadesinde bu iki temel özelliğe vurgu yapılmıştır. Öğretmenlerin bazıları matematiksel akıcılığın temel özelliklerini, akıl yürütme (\ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L2}), ilişkilendirme (\ddot{O}_{01} , \ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{L3}), problem çözüme (\ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{L5}), ve iletişim becerisi (\ddot{O}_{L1}) gelişmiş olma şeklinde matematiksel becerilerin gelişimi ile ilişkilendirerek betimlemiştir. Ayrıca öğretmenlerden bir kaç, ders tekrarı ve alıştırmalara zaman harcayıp devamlılık göstermeyi, sabırlı ve azimli olmayı, okuduğunu anlama ve yorumlamayı, etkili ve doğru çözümler geliştirebilmeyi, pratik çözümler üretebilmeyi, yaratıcı düşünebilmeyi matematiksel akıcılığın özellikleri olarak tanımlamışlardır.

Bununla birlikte öğretmenlere matematiksel akıcılıkla ilgili özelliklerin her sınıf düzeyi için aynı olup olmadığına dair bir soru yöneltilmiş ve öğretmenlerden dokuzu (\ddot{O}_{02} , \ddot{O}_{03} , \ddot{O}_{04} , \ddot{O}_{05} , \ddot{O}_{06} , \ddot{O}_{L1} , \ddot{O}_{L2} , \ddot{O}_{L3} , \ddot{O}_{L6}) hayır cevabını, ikisi (\ddot{O}_{01} , \ddot{O}_{L4}) evet cevabını vermişken bir öğretmen (\ddot{O}_{L5} : *Düşünmüyorum, herkes aynı değildir herhalde*) ise kararsız kalmıştır. Örneğin hayır cevabı veren \ddot{O}_{02} öğretmeni niçin hayır dediğini şu şekilde açıklamışken: “*Her sınıf seviyesinin farklı kazanımları olduğundan dolayı sınıf seviyelerine göre matematiksel akıcılıkla ilgili özelliklerde değişir. Ancak küçük yaşlardan itibaren matematiksel akıcılığın temelleri iyi atılırsa gelecek sınıf seviyelerindeki özelliklerin adaptasyonu daha kolay olur...*”, evet cevabını veren \ddot{O}_{L4} öğretmeni ise niçin evet dediğini şu şekilde açıklamıştır: “*Her sınıf için aynı olduğunu düşünüyorum. Çünkü öğrencilerin bu özelliğe sahip olması için öğrencilerin rahatlıkla düşüncelerini ifade edebileceği, etkin bir şekilde iletişim kurabileceği, sorgulamaya açık bir sınıf ortamı olması gerektiğini düşünüyorum...*”

3.3. Matematiksel akıcılığın öğrenciler konuşurken mi yoksa yazarken mi daha çok görülebileceğine dair bulgular

Matematiksel akıcılığın öğrenciler konuşurken mi yoksa yazarken mi daha çok görülebileceğine ilişkin öğretmenlerden elde edilen bulgular Tablo 8'deki gibi üç farklı kod oluşturularak değerlendirilmiştir.

Tablo 8. Akıcılık öğrenciler konuşurken mi yoksa yazarken mi daha çok görülebileceğine ilişkin bulgular

Kodlar	Öğretmenler
Konuşurken daha çok (Konuşurken > Yazarken)	$\ddot{O}_{02} - \ddot{O}_{L4}$
Yazarken daha çok (Yazarken > Konuşurken)	$\ddot{O}_{06} - \ddot{O}_{L1}$
Kararsızım	$\ddot{O}_{01} - \ddot{O}_{03} - \ddot{O}_{04} - \ddot{O}_{05} - \ddot{O}_{L2} - \ddot{O}_{L3} - \ddot{O}_{L4} - \ddot{O}_{L6}$

Tablo 8 incelendiğinde 8 öğretmenin matematiksel akıcılığın öğrenciler konuşurken mi yoksa yazarken mi daha çok görülebileceği konusunda kararsız olduğu belirlenmiştir. Örneğin \ddot{O}_{05} öğretmeni kararsızlığının nedenini matematiksel bağlama veya içeriğe bağlamış ve şu şekilde bir açıklama yapmıştır: “Her ikisinde de görülebilir. Hangisinde daha fazla görülür gibi bir sınıflama yapmak çok doğru olmaz kanaatindeyim... Zaten yazılı metinler söylemlerin yansımalarıdır. Bence burada matematiksel bağlam önemlidir ve bu durum matematiksel bağlama göre değişir... Benzer şekilde \ddot{O}_{L6} öğretmenin “Konuşurken çoklu katılım ve çok fikir, yazarken bireysellik ve daha sınırlı fikir. Bu nedenle hangisinde daha fazla görüleceği konusunda bir fikrim yok...” şeklindeki ifadesinden öğretmenin kararsız olduğu anlaşılmıştır. Bununla birlikte \ddot{O}_{02} öğretmeni “Konuşurken daha akıcı olursa yazma eylemi verimli olur. Onun için önce konuşma...” şeklindeki ifadesinde matematiksel akıcılığın öğrenciler konuşurken daha çok görülebileceğine vurgu yapmışken, \ddot{O}_{L1} öğretmeni ise “Matematikte konuşurken değil yazarken daha çok görülebileceğine inanıyorum. Yazılı olarak yaptıkları çözümlerde de bunu daha fazla görebiliriz. Problemler karmaşıklıkla yazılı çözümden akıcılık daha da önemli hale gelir. Böylece çözüm takip edilebilir ve anlaşılır olur...” şeklindeki ifadesinde matematiksel akıcılığın öğrenciler yazarken daha çok görülebileceğine vurgu yapmıştır.

3.4. Matematiksel akıcılık ile diğer matematiksel beceriler arasındaki ilişkilere dair bulgular

Öğretmenlerin çoğunluğu (\ddot{O}_{L5} hariç diğer öğretmenlerin hepsi) matematiksel akıcılık ile akıl yürütme, iletişim kurma, ilişkilendirme ve problem çözme gibi matematiksel beceriler arasında ilişki olduğunu ifade etmiştir. Örneğin; doktora öğrencisi \ddot{O}_{05} öğretmenin “Hepsi de ilişkilidir. Soruda veya problemde anlatılmak isteneni anlamak en önemli unsur, anlayan daha akıcı hareket eder. Daha sonra akıl yürütürken yöntem geliştirilir ya da önceki konular veya sorularla mevcut durum ilişkilendirilebilir ve problemi çözme becerisi iyi olan öğrencilerde hızlı bir şekilde sonuca ulaşır... Yani akıcı olan bu becerileri daha iyi içselleştirir ve süreç boyunca daha hızlı hareket eder. Tersine bu becerilerde iyi olan öğrenciler matematikte daha hızlı, verimli, esnek, doğru hesaplamalar veya yöntemler geliştirebilir...” şeklindeki ifadesinden öğretmenin matematiksel akıcılığın akıl yürütme, iletişim, ilişkilendirme ve problem çözme gibi matematiksel becerileri etkilediğine, matematiksel becerilerde daha yetkin olanların ise matematikte daha akıcı ilerleyebildiğine vurgu yaptığı tespit edilmiştir. Benzer şekilde yüksek lisans öğrencisi \ddot{O}_{L3} öğretmenin “... Akıcılık tüm bu becerilerin birlikte kullanılarak gerektiğinde karmaşık problemlerin çözülmesinde önemli bir yere sahiptir. Hem düşünce hem de yazılı olarak yapılan matematiksel işlemlerde akıcılık olması o konu üzerinde akıl yürütülmesini, ilişkilendirme yapılmasını, problemin çözülmesini ve çözümün anlaşılmasını sağlar. Aynı şekilde kişinin bu becerilere sahip olması ve bunları organize ederek kullanabilmesi yaptığı matematiksel uğraşın akıcılığını artırır. Bu anlamda doğrudan ilişkili olduğunu düşünüyorum. Bu becerilere sahip olan öğrencilerde matematiksel akıcılık daha belirgin görülüyor...” şeklindeki ifadesinden de öğretmenin matematiksel akıcılık ile diğer matematiksel becerileri arasında ilişki olduğuna vurgu yaptığı belirlenmiştir. Bununla birlikte \ddot{O}_{L5} öğretmenin “İletişim kurma belki değil ama diğerleriyle doğrudan ilintilidir. Çünkü iletişim kurmayı düşünüyorum akıcılığı düşünüyorum bağlantı kuramıyorum. Belki de vardır ben bilmiyorum... Emin değilim. Ancak diğerleri ile ilişki vardır...” şeklindeki alıntısından öğretmenin iletişim becerisi ile matematiksel akıcılık arasındaki ilişki olup olmadığında tereddüt yaşadığı, diğer matematiksel beceriler ile akıcılık arasında ilişki olduğuna vurgu yaptığı anlaşılmıştır. Sonuç olarak öğretmenlerin neredeyse tamamı matematiksel akıcılık ile diğer matematiksel beceriler arasında ilişki olduğunu ifade etmişlerdir.

3.5. Matematiksel akıcılık ile “anlama/kavrama” arasındaki ilişkiye dair bulgular

Matematiksel akıcılık ile “anlama/kavrama” arasında ilişki olduğuna dair veriler incelendiğinde, öğretmenlerin bakış açıları Tablo 9’deki gibi üç farklı kod oluşturularak değerlendirilmiştir.

Tablo 9. Matematiksel akıcılık ile “anlama/kavrama” arasında ilişki olup olmadığına ilişkin bulgular

Kodlar (ilişki ve yönü)	Öğretmenler
Anlama/kavrama \Leftrightarrow Matematiksel akıcılık	$\ddot{O}_{05} - \ddot{O}_{L6}$
Anlama/kavrama \Rightarrow Matematiksel akıcılık	$\ddot{O}_{01} - \ddot{O}_{02} - \ddot{O}_{03} - \ddot{O}_{04} - \ddot{O}_{06} - \ddot{O}_{L1} - \ddot{O}_{L2} - \ddot{O}_{L4} - \ddot{O}_{L3}$
Anlama/kavrama \Leftarrow Matematiksel akıcılık	\ddot{O}_{L5}

Sembollerin anlamı: \Leftrightarrow : çift yönlü kuvvetli ilişki; \Rightarrow : tek yönlü kuvvetli ilişki; \Leftarrow : tek yönlü zayıf ilişki; $?$: ilişki olup olmadığına kararsız

Öğretmenlerden ikisinin bu iki kavram arasında çift yönlü kuvvetli bir ilişki olduğuna vurgu yaptığı, dokuzunun tek yönlü kuvvetli ancak ters yönde zayıf bir ilişki olduğuna vurgu yaptığı, bir öğretmenin ise kararsız kaldığı belirlenmiştir. Örneğin, Ö_{L6} öğretmeni “*Kavramadan akıcılık olmuyor ne yazık ki. Sadece kalıp işlemler ezberlenerek öğrenildiği zannediliyor... Ayrıca akıcı olan da daha çabuk kavlıyor. Bence çift yönlü çok fazla etkileşim vardır...*” şeklindeki söyleminden anlama veya kavrama ile akıcılık arasında çift yönlü kuvvetli bir ilişki olduğuna vurgu yaptığı belirlenmiştir. Ö_{O3} öğretmenin “*Bazen öğrettiğim en iyi çocuklarımın gerçekten derin bir anlayışa sahip olduğunu, akıcılıktan yoksun olduğunu düşünüyorum. Yani akıcı olmadan da anlayabileceklerini düşünüyorum. Ama bunun tam tersi şekilde çalışabileceğini sanmıyorum...*” ve Ö_{L1} öğretmenin “*Anlarsa veya kavarsa daha akıcı işlem veya hesaplama yapabilir. Tıpkı Türkçede gibi anlarsa daha etkili konuşabilir. Tersinin kısmen doğru olduğu kanaatine sahibim. Yani akıcılık olmadan anlayabilir, ancak anlamadan kavramadan akıcı olunmaz. Örneğin bir öğrenci matematiksel bir yapıyı kavrayarak akıcılığı yakalayabilir bence. Fakat temel matematiksel işlemler için bazen mantığını anlamadan akıcı bir şekilde işlem yapabildiğini de görebiliriz...*” şeklindeki ifadelerinden öğretmenlerin anlamının veya kavramanın matematiksel akıcılığı çok fazla etki ettiğine ancak matematiksel akıcılığın ise anlama veya kavrama üzerine çok etki etmediğine vurgu yaptıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte Ö_{L5} öğretmenin “*Türkçe konuşmadan uyarlasak... Akıcı konuşmak için anlamak veya kavramak tek başına yeterli mi emin değilim... Dışa dönük bir kişi anladığı veya kavradığı konuyu aktarabilir. Akıcı olmasına gerek yok fikrimce. Yani anlama akıcılığı etkiler gibi, ancak diğeri nasıl etkiler tam olarak düşünmüyorum...*” şeklindeki ifadesinden öğretmenin bu iki kavram arasındaki ilişkiyi tanımlamada yetersiz kaldığı ve ilişkinin yönünü belirlemede kararsız olduğu belirlenmiştir. Sonuç olarak öğretmenlerin çoğunluğu matematiksel açıdan akıcı olmada anlamının veya kavramanın gerekli olduğunu, ancak anlamada veya kavramada matematiksel akıcılığın etkisinin daha az olduğunu ifade etmişlerdir.

3.6. Matematiksel akıcılığın bağlantılı olduğu öğrenme alanlarına dair bulgular

Bu kısımda sunulan bulgular, matematik öğretmenlerinin anket formunda ikinci açık uçlu soruya ve yarı-yapılandırılmış görüşme protokolündeki altıncı soruya verdiği cevaplardan oluşturulmuştur. Öğretmenlerin “Akıcılık denilince aklınıza ilk olarak hangi konu/öğrenme alanı geliyor?” şeklindeki açık uçlu soruya verdikleri cevapların analizi ile Tablo 10 oluşturulmuştur.

Tablo 10. Matematiksel akıcılığın ilişkili olduğu öğrenme alanlarına dair 60 öğretmenden elde edilen bulgular

Ortaokul öğretmenleri		Lise öğretmenleri	
Öğrenme alanı/konu	Frekans	Öğrenme alanı/konu	Frekans
Sayılar ve işlemler	22	Sayılar ve cebir	26
Cebir	6	Geometri	1
Geometri	-	Veri sayma ve olasılık	3
Veri işleme ve olasılık	2		

Tablo 10 incelendiğinde ortaokul öğretmenlerin genel olarak matematiksel akıcılıkla sayılar ve işlemler öğrenme alanını, lise öğretmenlerinin ise sayılar ve cebir öğrenme alanını daha çok ilişkilendirdiği anlaşılmaktadır. Bununla birlikte mülakat yapılan 12 öğretmenden elde edilerek oluşturulan Tablo 11’deki verilerden de görüldüğü gibi matematik öğretmenlerinin çoğu matematiksel akıcılığın görüldüğü tek alanın sayılar ve işlemler öğrenme alanı olmadığına, farklı konu veya öğrenme alanlarında da matematiksel akıcılığı görülebileceğine vurgu yaptıkları tespit edilmiştir.

Tablo 11. Matematiksel akıcılığın ilişkili olduğu öğrenme alanlarına dair 12 öğretmenden elde edilen bulgular

Kodlar	Öğretmenler
Hayır	Ö _{O1} - Ö _{O2} - Ö _{O3} - Ö _{O4} - Ö _{O5} - Ö _{O6} - Ö _{L1} - Ö _{L2} - Ö _{L3} - Ö _{L6}
Evet	Ö _{L4}
Kararsız	Ö _{L5}

Ortaokul öğretmenlerin tamamı, matematiksel akıcılığın sayılar ve işlemler öğrenme alanı haricindeki öğrenme alanlarında da görülebileceğini ifade etmişken, bir lise öğretmeni ise matematiksel akıcılığın sadece sayılar ve cebir öğrenme alanında görülebileceğini belirtmiştir. Örneğin Ö_{O3} öğretmenin “*Temel matematiksel işlemler hemen hemen her matematiksel uğraşta karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle bu konudaki akıcılık önemlidir. Fakat sadece burasıyla sınırlı değildir. Temel işlem becerisi, muhakeme becerisi, problem çözme becerisi gibi becerileri bir arada kullanarak problem durumuna uygun çözüm oluşturmak ya da açıklamalarda bulunmak da akıcılığın görüleceği alanlardır. Geometri, İstatistik gibi alanlarda da bunu görebiliriz. Yani akıcılıktan tek kasıt hatasız işlem olmamalı. Aynı bir örgü örüyormuş gibi kişi edindiği bilgileri önündeki matematiksel durum için bir araya getirmeli ve bu bir araya getirişi sözlü ve yazılı olarak ifade edebilmeli”* şeklindeki ifadesinden öğretmenin matematiksel akıcılığın farklı öğrenme alanlarında görülebileceğine vurgu yaptığı anlaşılmıştır. Ancak Ö_{L4} lise matematik öğretmenin “*Bence evet... Sayı ve cebir öğrenme alanı ile*

ilişkisi çok fazla. Bu doğal bir şey. Çünkü tüm sınıf seviyelerinde ilk öğrenme alanı sayılar ve işlemler öğrenme alanı. Sayılar konusu tüm öğrenme alanları ile ilişkili olduğundan matematiksel akıcılık bence özellikle lisede sayılar ve cebir öğrenme alanı ile sınırlıdır...” şeklindeki ifadesinden öğretmenin sayılar ve cebir öğrenme alanının ön plana çıkardığı anlaşılmaktadır. Bununla birlikte Ö_{L5} matematik öğretmeni diğer mülakat sorularında olduğu gibi bu soruda da kararsız kalmış, “Bilmiyorum... Çok fazla bilgim yok... Okuduğunu anlama kesinlikle olmalı...” şeklinde bir cevap vermiştir. Sonuç olarak her ne kadar öğretmenlerin çoğunluğu matematiksel akıcılık ile sayılar ve işlemler (sayılar ve cebir) öğrenme alanı arasındaki ilişkinin daha fazla olduğunu iddia etse de farklı öğrenme alanlarında da matematiksel akıcılığı görülebileceği görüşmelerden anlaşılmıştır.

3.7. Türkçe akıcılığın matematiksel akıcılığı etkileyip etkilemediğine dair bulgular

Öğretmenlerin tamamı matematiksel akıcılıkla Türkçe akıcılık arasında çok önemli ve derin bir ilişki olduğunu ifade etmiş ve Türkçe akıcılığın matematiksel akıcılığı çok fazla etkilediğine vurgu yapmışlardır. Örneğin yüksek lisans öğrencisi olan Ö_{O3} öğretmenin “*Matematiksel uğraşların çoğunda Türkçe açıklamalar, yönergeler veya günlük hayat senaryoları yer alıyor. Öğrencinin bu ifadeleri doğru anlaması, bu ifadeleri matematik dünyasına doğru bir şekilde aktararak çözüm geliştirmesini sağlar. Okuduğunu doğru ve akıcı bir şekilde anlamayan bireyin hata yapması mümkün. Ulaştığı sonucu veya çözüm stratejisini açıklayabilmesi için de yine Türkçe akıcılığı önemli. Türkçe akıcılığın iyi olması matematiksel akıcılığı olumlu yönde etkiler.*” şeklindeki ifadesi bu durumu gözler önüne sermektedir. Benzer şekilde Ö_{L6} öğretmeni Türkçe akıcılığın matematiksel akıcılığı olumlu yönde etkilediğini şu şekilde açıklamıştır: “*Türkçe de okuduğunu anlayıp anladığını ifade edebilen kişiler matematikte de aynı şekilde kendilerini daha rahat ifade edeceklerdir. Türkçe akıcılığı olmayan bir kişi matematik anlayıp ifade edemeyeceği için olumsuz etkilenir. Yani okuduğunu anlama ve anladığı matematikselleştirme önemlidir. Durumu anlatan daha anlamlı bir şekilde akıcı hesaplamalar yapar ve daha doğru, verimli ve etkili muhakeme yapar...*”. Sonuç olarak öğretmenlerin tamamı Türkçe akıcılığın matematiksel akıcılığın gelişimi için önemli olduğunu belirtmişlerdir.

4. Tartışma ve Sonuçlar

Yarı yapılandırılmış görüşme ve açık uçlu sorulardan elde edilen verileri tartışılmadan önce 5’li Likert tipli anket maddelerinden elde edilen tüm öğretmenlere ait Tablo 4’deki verileri yorumlanmış ve daha sonra görüşmelerden elde edilen verilerle bu veriler birlikte tartışılmıştır.

Anket maddelerine verilen cevaplardan hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematik öğretmenlerinin genel olarak matematiksel akıcılık ile ilgili aynı dili konuştukları anlaşılmaktadır. Örneğin matematiksel fikirlerin öğrenciler tarafından keşfedilebileceği, öğrencilerin matematikte akıcı olabilmelerinde iletişim becerisinin önemli olduğu, akıcılığın doğal olarak gelişmediği ve öğretilmesi gerektiği konusunda hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematik öğretmenlerin kararsız olduğu anlaşılmaktadır. Bu kararsızlıklardan biri, Boaler’in (2016) akıcılığın öğrenilmesi ve öğretilmesi gereken bir şey olduğu düşüncesi ile ayrılmaktadır. Ayrıca öğrencilerin matematiksel olarak akıcı olsalar bile yine de kavramları anlamayabileceklerine, öğrencilerin karmaşık problemleri çözmeden önce temel matematiksel işlemlerde uzmanlaşmaları gerektiğine ve öğrencileri stratejilerini açıklamaya teşvik etmenin önemli olduğuna hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematik öğretmenlerinin çoğunluğunun katıldıkları tespit edilmiştir. Benzer şekilde öğrencilerin matematikte cevaba hızlı bir şekilde ulaşabilmeleri, muhakeme ederek cevaplarını açıklayabilmelerinden daha önemli olduğu veya öğretmenlerin öğrenciler matematik problemleri üzerinde çalışırken, izlenen süreçten çok doğru cevabı bulmalarına daha fazla önem verdiği şeklindeki anket maddelerine her iki gruptaki öğretmenler de kesinlikle katılmadığı belirlenmiştir. Bu ise anlamının hızlı hatırlamadan daha önemli bir şey olduğunu ortaya koymaktadır (Cartwright, 2018). Ancak “*matematikte birçok şey tamamen doğru kabul edilmeli ve hatırlanmalıdır*” maddesine ilköğretim öğretmenlerinin katıldığı ancak ortaöğretim öğretmenlerinin kararsız kaldığı, “*Matematiksel akıcılık, öğrencilerin prosedürleri hatırlama yeterliliğine bağlıdır*” maddesine ise ortaöğretim öğretmenlerinin katıldığı ancak ilköğretim öğretmenlerinin kararsız kaldığı anlaşılmıştır. Sonuç olarak anket maddeleri, hem öğretmenlerin farklı inançları (birbirleri arasında) hem de öğretmenlerin (kendi içlerinde) geleneksel ve çağdaş yelpazenin farklı uçlarıyla eşleşen karmaşık inançlara sahip olduğunu göstermiştir.

Matematiksel akıcılığı tanımlamada 34 farklı kelime yazan öğretmenlerin en çok tercih ettikleri kelime “verimli/etkili” iken, “esnek, strateji ve doğru” kelimelerini de sıklıkla kullanmışlardır. Kullanılan kelimeler akıcılığın (etkili, esnek, verimli/uygun bir şekilde) literatürdeki tanımlarıyla (Kilpatrick vd., 2001; Watson & Sullivan, 2008) tutarlıdır. Örneğin, bu kelimeler Watson ve Sullivan’ın (2008) öğrencilerin esnek, doğru, verimli ve uygun bir şekilde prosedürleri uygulayabilmelerini içeren matematiksel akıcılık tanımıyla uyumludur. Öğretmenlerin en çok tercih ettiği kelimelerden biri de “anlama veya kavrama” kelimeleridir. Nitekim matematiksel akıcılıkla ilgili birçok tanımda bu kavramlarla akıcılık ilişkisine sıklıkla vurgu yapılmaktadır (Boaler, 2015; Hiebert, 1999; McClure, 2014; Watson ve Sullivan, 2008). “Hatırlama ve hız” kelimelerini tercih eden öğretmenlerin sayısı ise oldukça azdır. Anket sonuçlarına göre öğrencilerin matematikte cevaba hızlı bir şekilde ulaşabilmeleri, muhakeme ederek cevaplarını açıklayabilmelerinden daha önemli olduğunu düşünen öğretmenlerin sayısı oldukça azdır. Bu iki veri birbirine paralelidir. Hâlbuki akıcılıkta hız ve hızlı hatırlama

aranacak ilk kelimelerdendir. Matematik dışındaki akıcılık tanımlamaları her ne kadara akıcılığı hız veya hatırlama ile ilişkilendirmezse de matematikte akıcılık genellikle hız veya hızlı hatırlama ile eş anlamlı olarak ele alınır (Ramos-Christian vd., 2008; Wong & Evans, 2007). Benzer şekilde öğretmenlerin “güven/cesaret/inanma” kelimelerini daha az tercih etmişlerdir. Kilpatrick vd.’nin (2001) matematiksel yeterlilikler ile ilgili bileşenlerinden olan işlemsel akıcılık ile üretken eğilim kavramlarının bağlantılı olmasına rağmen “güven/cesaret/inanma” kelimelerinin daha az tercih edilmesi ilginç bir sonuçtur. Ayrıca “matematiksel akıcılığın” tanımına ilişkin öğretmenlerle yapılan görüşmelerden elde edilen veriler ile anket maddelerinden elde edilen verilerde uyumaktadır. Örneğin öğretmenlerin anket maddelerinde kararsız olması ile alıntılarda matematiksel akıcılığın öğretmenler için karmaşık bir kavram olması örtüşmektedir. Öğretmenlerden bazıları “matematiksel akıcılık” kavramı ile bakış açılarının doğruluğunu teyit etmek için kendi öğrenmeleri, sosyal deneyimleri, sınıf uygulamaları ve öğrencilerinin yaptıklarıyla bağlantı kurdular. Bir başka ifade ile öğretmenlerin matematiksel akıcılığa bakış açıları, hem içsel faktörlerden (kendi eğitim deneyimleri ve kişisel bilgi ve içerik ve pedagoji inançları) hem de dış faktörlerden (öğrencilerin sınıflarındaki bilgileri, sosyal deneyimleri ve okul bağlamı) etkilenmiştir.

Matematiksel akıcılığın temel özelliklerinin ne olduğu ile ilgili öğretmen görüşleri ile literatürdeki çalışmaların sonuçları paralellik göstermektedir. Öğretmenlerin yarım fazlası, kavramsal anlamının (nerede ne yapacağını, hangi yöntemle soruyu çözebileceğini, niçin bu çözümü tercih ettiğini veya yaptığını sorgulama), farklı çözüm stratejileri/yöntemleri geliştirebilmenin, prosedürleri planlı, sistematik ve düzenli bir şekilde organize edebilme yeterliliğine sahip olabilmenin matematiksel akıcılığın temel özellikleri olduğunu ifade etmişlerdir. McCluer’a (2014) göre öğrencilerin neden belirli stratejileri kullandıklarını anlamaları ve farklı yöntemler kullanmanın ne zaman uygun olduğunu bilmeleri matematiksel akıcılığın temel özelliklerindedir. Öğretmenlerin yaklaşık üçte biri ise hızlı bir şekilde hesaplama yapabilmek ve bu hesaplamaları yorumlayabilmenin (süreci kontrol edip geri dönümler verebilme), sayı hissi ve hesaplama becerisi gelişmiş olmanın matematiksel akıcılığın temel özelliklerinden biri olarak görmüşlerdir. Öğretmenlerin bazıları ise matematiksel akıcılığın temel özelliklerini, akıl yürütme (\hat{O}_3 , \hat{O}_5 , \hat{O}_{L1} , \hat{O}_{L2}), ilişkilendirme (\hat{O}_{01} , \hat{O}_{02} , \hat{O}_{L3}), problem çözme (\hat{O}_{03} , \hat{O}_{L5}), ve iletişim becerisi (\hat{O}_{L1}) gelişmiş olma şeklinde matematiksel becerilerin gelişimi ile ilişkilendirerek tanımlamışlardır. Benzer bir bakış açısı anket verilerinden elde edilmiş olup, bu durum Kilpatrick vd.’nin (2001) iç içe geçmiş matematik yeterlilikleri ile ilgili çatısı ile uyumludur. Ayrıca öğretmenlerden bir kaçı, ders tekrarına ve alıştırmalara zaman harcayıp devamlılık göstermeyi, sabırlı ve azimli olmayı, okuduğunu anlama ve yorumlamayı, etkili ve doğru çözümler geliştirebilmeyi, pratik çözümler üretebilmeyi, yaratıcı düşünebilmeyi matematiksel akıcılığın özellikleri olarak tanımlamışlardır. Bu anlamda elde edilen veriler öğretmenlerin akıcı olduğunu düşündükleri öğrenciler ile akıcı olmayan öğrenciler arasında net bir ayrım yaptığını göstermiştir. Örneğin prosedürel akıcılığa sahip olan veya içeriği ezberleyerek öğrenen öğrencilerin gerçekten akıcı olmadıklarını belirtmek (Cartwright, 2018), aslında matematiksel akıcılıkta kavramsal anlamının neden önemli olduğunu göstermektedir. Öğretmenlerin akıcı olduğunu düşündükleri öğrenciler ise süreçlerde ne yapacaklarını ve farklı durumlarda hangi stratejilerin daha verimli olduğunu bilmenin yanı sıra prosedürel bilgiye de sahiptiler. Görüşmeler sonucu elde edilen bu veriler öğretmenlerin matematiksel akıcılıkla ilgili birçok temel özelliği kapsamlı bir şekilde listelediğini göstermiştir. Örneğin öğretmenler, öğrencilerin sergiledikleri stratejik yeterlilikler (etkili, farklı, çoklu seçim), ilettikleri kavramsal anlayış (anlama, bağlantı kurma, açıklama) ve kullandıkları uyarlanabilir akıl yürütme (aktarma, hatalar üzerinde çalışma, kendi kendini düzeltme) ile ilgili benzer sözcükleri sık sık kullanmışlardır. Bu özellikler Kilpatrick vd. (2001) iç içe geçmiş matematiksel yeterlilikleri ile örtüşmektedir. Bununla birlikte öğretmenlere matematiksel akıcılıkla ilgili özelliklerin her sınıf düzeyi için aynı olup olmadığına dair bir soru yöneltilmiş ve öğretmenlerden dokuzunda hayır cevabını, ikisi evet cevabını vermişken bir öğretmen ise kararsız kalmıştır.

Görüşme yapılan öğretmenlerin çoğunluğunun matematiksel akıcılığın öğrenciler konuşurken mi yoksa yazarken mi daha çok görülebileceği konusunda kararsız olduğu belirlenmiştir. Nitekim bu durum anket maddelerindeki öğretmenlerin kararsızlıkları ile örtüşmektedir. Ayrıca öğretmenlerden ikisi matematiksel akıcılığın öğrenciler konuşurken daha çok görülebileceğine, diğer iki öğretmen ise matematiksel akıcılığın öğrenciler yazarken daha çok görülebileceğine vurgu yapmıştır. Öğretmenlerin çoğu matematiksel akıcılık ile akıl yürütme, iletişim kurma, ilişkilendirme ve problem çözme gibi matematiksel beceriler arasında ilişki olduğunu ifade etmiştir. Örneğin öğretmenlerden biri matematiksel akıcılığın akıl yürütme, iletişim, ilişkilendirme ve problem çözme gibi matematiksel becerileri etkilediğine, matematiksel becerilerde daha yetkin olanların ise matematikte daha akıcı ilerleyebildiğine vurgu yaptığı tespit edilmiştir. Bununla birlikte \hat{O}_{L5} öğretmenin iletişim becerisi ile matematiksel akıcılık arasındaki ilişki olup olmadığına tereddüt yaşadığı, diğer matematiksel beceriler ile akıcılık arasında ilişki olduğuna vurgu yaptığı anlaşılmıştır.

Öğretmenler matematiksel açıdan akıcı olmadıkça anlamının veya kavramının gerekli olduğunu, ancak anlamada veya kavramada matematiksel akıcılığın etkisinin daha az olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmenlerden ikisinin bu iki kavram arasında çift yönlü kuvvetli bir ilişki olduğuna vurgu yaptığı, dokuzunda tek yönlü kuvvetli ancak ters yönde zayıf bir ilişki olduğuna vurgu yaptığı, bir öğretmenin ise kararsız kaldığı belirlenmiştir Cartwright (2018) de öğrencilerin akıcılık olmadan anlamalarının mümkün olduğunu, ancak

tersinin mümkün olmadığını ifade etmiştir. Bir başka ifade ile stratejik yeterliliğin bir parçası olarak öğrenciler matematiksel akıcılığa sahip olabilirler, ancak kavramsal anlamının bir parçası olarak prosedürleri ne zaman kullanacakları konusunda bilgiden yoksun olabilirler. Kilpatrick vd. (2001) prosedürleri anlamadan öğrenen öğrencilerin tipik olarak öğrenilen prosedürleri uygulamaktan fazlasını yapamayacağını, anlayarak öğrenenlerin ise kullanımlarını kolaylaştırmak için prosedürleri değiştirebileceğine veya uyarlayabileceğini ifade etmişlerdir.

Ortaokul öğretmenlerin genel olarak matematiksel akıcılıkla sayılar ve işlemler öğrenme alanını, lise öğretmenlerinin ise sayılar ve cebir öğrenme alanını daha çok ilişkilendirdiği anlaşılmaktadır. Bununla birlikte mülakat yapılan matematik öğretmenlerinin çoğu matematiksel akıcılığın görüldüğü tek alanın sayılar ve işlemler öğrenme alanı olmadığına, farklı konu veya öğrenme alanlarında da matematiksel akıcılığı görülebileceğine vurgu yaptıkları tespit edilmiştir. Görüşme yapılan ortaokul öğretmenlerin tamamı, matematiksel akıcılığın sayılar ve işlemler öğrenme alanı haricindeki öğrenme alanlarında da görülebileceğini ifade etmişken, bir lise öğretmeni ise matematiksel akıcılığın sadece sayılar ve cebir öğrenme alanında görülebileceğini belirtmiştir. Sonuç olarak her ne kadar öğretmenlerin çoğunluğu matematiksel akıcılık ile sayılar ve işlemler (sayılar ve cebir) öğrenme alanı arasındaki ilişkinin daha fazla olduğunu iddia etse de farklı öğrenme alanlarında da matematiksel akıcılığı görülebileceği görüşmelerden anlaşılmıştır.

Öğretmenlerin tamamı matematiksel akıcılıkla Türkçe akıcılık arasında çok önemli ve derin bir ilişki olduğunu ifade etmiş ve Türkçe akıcılığın matematiksel akıcılığı çok fazla etkilediğine vurgu yapmışlardır. Newman'ın (1977) "İngilizce 'de akıcı ve okuyazar olmak öğrencinin matematik problemlerini okuma, anlama, yorumlama ve çözüme becerisinde hayati bir rol oynar" ifadesi göz önüne alındığında, Türkçe 'de de akıcı olmanın matematiksel akıcılık için önemli olduğunu söylemeye yön verebilir. Bununla birlikte lisansüstü eğitimi alan öğretmenlerin matematiksel akıcılığa bakış açılarının diğer öğretmenlere göre daha geniş bir perspektifte olduğu tespit edilmiştir.

5. Öneriler

Çalışma her ne kadar farklı bölgelerden öğretmenlerle yürütülmüşse de örneklemin azlığı bu çalışma için önemli bir sınırlılıktır. Bu nedenle veri toplama araçlarının uygulanacağı öğretmenlerin sayılarının artırılması matematiksel akıcılık kavramı ile ilgili bakış açılarının daha iyi analiz edilmesini sağlayabilir. Ayrıca çalışmada hem anketten hem de görüşmelerden elde edilen veriler paylaşılmış olsa da, matematiksel akıcılık bağlamında sınıf içi uygulamaların gözlemlenmesi, öğretmen anlayışları ile öğretim uygulamaları arasındaki ilişki hakkındaki yorum yapmaya yardımcı olabilir. Benzer şekilde öğretmenler tarafından belirtilen akıcılık özelliklerinin öğrencilerde gerçekten mevcut olduğunu doğrulamak için sınıf içi uygulamaları gözlemek gerekmektedir. Bu çalışmanın bulguları yalnızca öğretmenlere ait olduğundan, matematiksel akıcılık ile ilgili gelecek çalışmalarda görevler üzerinde çalışan öğrencileri gözlemek, öğrencilerle akıl yürütmelerini ve stratejilerini tartışmak ve akıcılığın özellikleri için öğrenci çalışma örneklerini analiz etmek için öğretmenlerle işbirliği içinde araştırma yapmak önemlidir. Bu tür çalışmalar aynı zamanda öğretmenlerin matematiksel akıcılık kavramlarını öğrenci davranışlarıyla doğrulamaya yardımcı olacaktır.

Kaynaklar / References

- Alptekin, S. (2019). Matematik işlemlerinde akıcılığın geliştirilmesi: Dinleyerek işlem yapma uygulamaları. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Özel Eğitim Dergisi*, 20(3), 629-649.
- Anderson, J., & Bobis, J. (2005). Reform-oriented teaching practices: A survey of primary school teachers. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 65-72.
- Ashcraft, M. H., & Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14(2), 243-248.
- Baki, A. (1994). *Breaking with tradition: a study of Turkish student teachers' experiences within a Logo-based mathematical environment* (Unpublished doctoral dissertation), UCL, UK.
- Bauer, B. J. (2013). *Improving multiplication fact recall; Interventions that lead to proficiency with mathematical facts*. Graduate research papers, 11, 1-59.
- Boaler, J. (2015). Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts. *Reflections*, 40(2), 7-12.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching* (First ed.). San Francisco, CA: Jossey-Bass, a Wiley Brand.
- Cartwright, K. (2018). *Teachers' conceptions of mathematical fluency*, (Unpublished master dissertation), Sydney School of Education and Social Work, The University of Sydney.
- Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design: choosing among five approaches* (Vol. 3rd). Thousand Oaks: SAGE Publications.
- Dawson, B. & Trapp, R., G. (2001). *Probability & related topics for making inferences about data*. Basic & Clinical Biostatistics. 3rd Edition, Lange medical Books/McGraw-Hill Medical Publishing Division, 69-72.

- Finnane, M. (2004). *The role of assessing counting fluency in addressing a mathematical learning difficulty*. Paper presented at the PME 28 CONFERENCE, Bergen, Norway.
- Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*: Heinemann Portsmouth, NH.
- Foster, C. (2013). Mathematical études: embedding opportunities for developing procedural fluency within rich mathematical contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 1-9.
- Foster, C. (2014). Mathematical fluency without drill and practice. *Mathematics Teaching* (240), 5-7.
- Graven, M., Stott, D., Nieuwoudt, S., Laubscher, D., & Dreyer, H. (2012). *Conceptualising procedural fluency as a spectrum of proficiency*. Paper presented at the Proceedings of the 18th Annual National Congress of the Association for Mathematical Education of South Africa (AMESA)
- Güler, N., & Taşdelen-Teker, G. (2015). Açık uçlu maddelerde farklı yaklaşımlarla elde edilen puanlayıcılar arası güvenilirliğin değerlendirilmesi. *Eğitimde ve Psikolojide Ölçme ve Değerlendirme*, 6 (1), 12-24.
- Handal, B., & Herrington, A. (2003). Mathematics teachers' beliefs and curriculum reform. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 59-69.
- Harris, L., & Brown, G. (2010). Mixing interview and questionnaire methods: Practical problems in aligning data. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 15, 1-19.
- Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM standards. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 3-19.
- İlhan, A. O. & Deniz, E. (2021). Anket Metodolojisinde Dört Ana Hata Türüne Giriş. *Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 42(1), Ö199-Ö214.
- Karasar, N. (1994). *Bilimsel Araştırma Yöntemi*. Ankara: Araştırma Eğitim ve Danışmanlık Ltd.
- Kemper, E., Stringfield, S., & Teddlie, C. (2003). *Mixed methods sampling strategies in social science research*. In A. Tashakkori & C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social & behavioral research* (pp. 273-296). Thousand Oaks, CA: Sage
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. E. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Pres.
- Kuhn, M. R., & Stahl, S. A. (2003). Fluency: A Review of Developmental and Remedial Practices. *Journal of Educational Psychology*, 95(1), 3-21.
- McClure, L. (2019). Developing number fluency - what, why and how. Retrieved from <https://nrich.maths.org/10624> accessed on 21 November 2021.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Procedural fluency in mathematics*. Retrieved from <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Procedural-Fluency-in-Mathematics/> accessed on 20 November 2021.
- Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin*, 39(31-43).
- Ramos-Christian, V., Schleser, R., & Varn, M. E. (2008). Math fluency: accuracy versus speed in preoperational and concrete operational first and second grade children. *Early Childhood Education Journal*, 35(6), 543-549.
- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189
- Russell, S. J. (2000). Developing computational fluency with whole numbers. *Teaching Children Mathematics*, 7(3), 154-158.
- Stott, D. (2013). A quick tool for tracking procedural fluency progress in Grade 2, 3 and 4 learners. *Learning and Teaching Mathematics*, 14, 36-39.
- Sullivan, P. (2011). *Teaching mathematics: Using research-informed strategies*. Australian Council for Educational Research, Camberwell, Victoria.
- Thomas, J. N. (2012). Toward meaning-driven mathematical fluency. *School Science and Mathematics*, 112(6), 327-329.
- URL- 1 (2021). In *Dictionary.com*. Retrieved from <http://www.dictionary.com/browse/fluency>
- Uysal, H. (2017). *Zihin yetersizliği olan öğrencilere temel toplama işlemlerinde akıcılık kazandırmada iki farklı uygulamanın karşılaştırılması*, (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Watson, A., & Sullivan, P. A. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In D. Tirosh, & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (1 ed., pp. 109 - 134). Sense Publishers.
- Wong, M., & Evans, D. (2007). Improving basic multiplication fact recall for primary school students. *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), 89-106.
- Yates, S. M. (2006). *Primary teachers' mathematics beliefs, teaching practices and curriculum reform experiences*. Paper presented at the Australian Association for Research in Education, Conference, Adelaide.