Research Article

Investigation of Symbol Sense Behaviors of 12th Grade Students in the Problem Solving Process

Tuğba Tat[a] and Yaşar Akkan[b]

[a]Ministry of Education, Torul, Gümüşhane, Turkey (ORCID: 0000-0001-9791-8229)
[b]Trabzon University, Fatih Faculty of Education, Turkey (ORCID: 0000-0001-5323-7106)

Article History: Received: 22 December 2021; Accepted: 3 August 2022; Published online: 30 August 2022

Abstract: With this research, it is aimed to examine the symbol sense behaviors of 12th grade students while solving problems in depth. For this reason, the study was designed according to the case study model, one of the qualitative research designs. The study was conducted with three twelfth grade students in a public school in Gümüşhane. In the selection of these students, the advice of the mathematics teacher was taken into account first, and then, with an algebra test applied, the students were divided into three levels as weak, moderate and good according to their academic achievements in algebra. The data of the study were collected through clinical interviews, which were supported by the literature and conducted on six problems, each of which was prepared to measure different behaviors related to symbol sense. The qualitative data collected as a result of the interviews were analyzed using descriptive analysis technique within the conceptual framework of the research. As a result, while the student with a good level of achievement exhibited the expected symbol sense behaviors in all of the given problems, the students with a medium and weak level of achievement could not display the symbol sense behaviors at the desired level for each problem.

Keywords: Symbol sense, Problem solving, 12th grade students

Öz: Bu araştırma ile on ikinci sınıf öğrencilerinin problem çözerken sergiledikleri sembol hissi davranışlarının derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Bu nedenle çalışma nitel araştırma desenlerinden durum çalışması modeline göre tasarlanmıştır. Çalışma, Gümüşhane iline bağlı bir ilçedeki devlet okulunda on ikinci sınıfta öğrenim gören üç öğrenci ile yürütülmüştür. Bu öğrencilerin seçiminde, ilk olarak matematik öğretmenin tavsiyesi dikkate alınmış, daha sonra uygulanan bir cebir testi ile öğrenciler, cebirdeki akademik başarılarına göre zayıf, orta ve iyi olmak üzere üç düzeye ayrılmıştır. Araştırmanın verileri, alan yazın destekli ve her biri sembol hissi ile ilgili farklı davranışları ölçmek için hazırlanan altı problem üzerinden yürütülen klinik mülakatlar aracılığıyla toplanmıştır. Mülakatlar sonucu toplanan nitel veriler, araştırmanın kavramsal çerçevesi dâhilinde betimsel analiz tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Sonuç olarak başarı düzeyi iyi olan öğrenci verilen problemlerin tamamında beklenilen sembol hissi davranışlarını sergilemişken, başarı düzeyi orta ve zayıf olan öğrenciler ise her bir problem için sembol hissi davranışlarını istenilen seviyede sergileyememiştir.

Anahtar Kelimeler: Sembol hissi, Problem çözme, 12.sınıf öğrencileri

Türkçe sürüm için tıklayınız

1. Introduction

According to Russell, mathematics is a combination of symbols and logic (Speaks, 2004). Since mathematics is a symbolic system composed of natural language, symbols, graphics, etc., it can be accepted as a language (Drouhard & Teppo, 2004). This is why mathematics uses symbols to reflect, express and communicate the thinking process of people. Symbols, which are concrete examples of mathematical existence, are essential for understanding the world, as well as being tools for people to express, calculate, reason, communicate and solve problems (Goldin, 1987). Especially the first big step towards reasoning with symbols was taken in the context of problem solving. Symbols, which are powerful tools for solving problems and modeling situations that we encounter in daily life and in mathematics, are necessary in the teaching of many other areas of mathematics as well as in the field of learning algebra, and therefore they have a very special place (Lins, 1992). In order for students to learn algebra, they must have a deeper understanding of the use of symbols, and this deep understanding is called the "symbol sense" (Darojaturrofiah, 2017).

Symbol sense, a logical extension of number sense (Pierce & Stacey, 2001); refers to the ability to give meaning to symbols, expressions, and formulas and to see important structures (Arcavi, 1994, 2005; Drijvers, 2003). Symbol sense is considered an understanding of proficiency in algebra and shows a relational meaning rather than a purely operational meaning (Jupri & Sispiyati, 2020). Fey (1990) defines symbol sense as an intuitive understanding or insight needed to deal effectively with symbolic expressions and algebraic operations. Keller (1993), on the other hand, defines symbol sense as a well-organized conceptual network that allows one to associate symbolic expressions and operational features. According to Arcavi (1994), symbol sense is an aesthetic sense or understanding for the power of symbols, in which one understands how and when symbols should be used to show relationships, generalizations, and evidence. Arcavi (1994) stated that it would be wiser

Corresponding Author: Yaşar Akkan **email:** akkanyasar61@hotmail.com

Citation Information: Tat, T. & Akkan, Y. (2022). Investigation of symbol sense behaviors of 12th grade students in the problem solving process. *Turkish Journal of Mathematics Education*, *3*(2), 1-24.

to focus on describing and discussing symbol sense behaviors rather than making a clear definition of the concept of symbol sense.

Like the sense of numbers, the symbol sense is defined by behaviors or experiences that involve this sense and help it develop (Kenney, 2008). For example, Driscoll (1999) defined symbol sense behaviors as knowing when symbols are needed and when they are unnecessary, interpret the meaning of symbols, controlling algebraic manipulations and predicting the result, predict algebraic representations or patterns by looking at a set of numbers, tables, and graphs, see algebraic representations and know how to express them in tables, graphs, and symbolic language. Pierce and Stacey (2001) expressed symbol sense behaviors as using symbols to express relationships, develop an understanding of when to use the symbol and how to approach it in different ways, recognize equivalent symbolic expressions, be able to interpret the meaning of symbols in a particular problem situation or beyond. Arcavi (2005), on the other hand, explained the symbol sense behaviors as follows and emphasized that these six behaviors are interrelated and closely related:

- ✓ *Friendship with symbols:* Understanding symbols and feeling the power of symbols. It is knowing how and when symbols should be used to show hidden and invisible relationships, generalizations and other evidence.
- ✓ *Reading and using symbolic expressions:* The ability to read and also use symbols are two complementary aspects of solving algebraic problems. It involves students' understanding of symbols that exist when faced with algebraic problems.
- ✓ *Designing symbolic expressions:* Being aware of being able to successfully organize symbolic relationships that express verbal or graphical information needed to progress in a problem, and designing these expressions.
- ✓ *Symbol selection:* It is choosing one of the possible symbol representations for a problem, such as assigning symbols to certain variables.
- ✓ *Checking the meanings of symbols during the execution of a procedure:* Checking the meaning of symbols before or during the execution of a procedure, solving a problem, or examining the results, and comparing the meaning of the symbol with one's intuition about the expected result.
- ✓ *Symbol context:* Recognizing that symbols can have different roles in different contexts (such as unknown, variable, parameter).

In the international literature on symbol sense, studies carried out at primary (Lamb, Bishop, Philipp, Schappelle, Whitacre, & Lewis, 2012; Papadopoulos, 2019), secondary (Cho & Song, 2010; Tabach, Arcavi & Hershkowitz, 2008), high school (Kop, Janssen, Drijvers& Van Driel, 2020; Pope & Sharma, 2001) and undergraduate levels (Kenney, 2008; Pierce & Stacey, 2004) are generally related to theoretical studies on symbol sense (Arcavi, 1994, 2005; Fey, 1990; Jupri & Sispiyati, 2020; Keller, 1993; Yu-xin, 2002; Zhu, Hu & Ma, 2017), practices related to symbol sense (Kenney, 2008; Kop et al., 2020; Lamb et al., 2012; Pope & Sharma, 2001; Sugilar, Kariadinata & Sobarningsih, 2019), and the use of technological tools that are stated to contribute to the development of symbol sense (Bokhove & Drijvers, 2010; Gierdien & Olivier, 2013; Kenney, 2008; Papadopoulos, 2019; Pierce & Stacey, 2004). In the international literature on symbol sensation, primary school, secondary school, high school and undergraduate The studies carried out at the level are generally related to the theoretical studies on symbol sense, with applications related to symbol sense and the use of technological tools that are stated to contribute to the development of symbol sense. Although there are so many studies in the international literature, there are very few studies on symbol sense in our country (Tat, 2021). For this reason, it is thought that the study will contribute to the expansion of research on symbol sense in national and international literature, to establish the framework for the analysis and evaluation of the symbol sense, contribute to theoretical knowledge about symbol sense and to offer support for teacher practices regarding symbol sense and to improve symbol sense in mathematics. In addition, according to the National Research Council [NRC] (1989), the main goal of middle and high school mathematics should be to develop of symbol sense and to continue the development of number sense (Keller, 1993). For this reason, studies on symbol sense at both secondary and high school levels will contribute to the mathematics curriculum of our country. In this context, the aim of this study is to examine the symbol sense behaviors of 12th grade students while solving problems in depth.

2. Method

2.1. Research Design

This research, which has a qualitative research design aiming to reveal the depth of descriptions and meanings (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2017), is a case study because the symbol sense behaviors of 12th grade students during the problem solving process are examined in depth. According to Creswell (2017), the case study is a qualitative research approach in which the researcher examines one or more limited cases in time with data collection tools that include multiple sources, and defines the situations and the themes related to the situation.

2.2. Participants

The research was conducted with three 12th grade students of a high school in Gümüşhane. The "maximum diversity" sampling method, one of the purposive sampling methods, was used to determine the study group of the research consisting of three students. The aim here is to create a relatively small study group and to reflect the diversity of students who may be a party to the problem studied in this group to the maximum extent. The aim is not to provide diversity to generalize; on the contrary, it is trying to find out whether there are common or shared facts and differences among the various situations and to reveal the different dimensions of the problem according. to the diversity (Yıldırım & Simsek, 2005). However, the maximum diversity method aims to discover and define the main themes that cover a large number of differences related to the event or phenomenon being studied (Neuman, 2014). In line with this purpose, an algebra test was administered to the students, taking into account the teacher's advice, and the students were divided into three levels according to their academic achievements as weak, moderate and good. In the presentation of the data, code names Öz, Öo and Öi were used to characterize the students with low, medium and good achievement levels, respectively

2.3. Data Collection Tools

In the study, the data were collected with the help of structured interview forms, which include six open-ended problems and given in Table 1. The literature was used in the selection of these problems in which students can exhibit six different symbol sense behaviors (Jupri & Sispiyati, 2020, 2021). Whether the problems in this data collection tool represent the purpose to be measured, that is, whether the problems can exhibit symbol sense behaviors during the preparation phase is determined according to expert opinion (Karasar, 1999). The problems prepared for this purpose were shown to a mathematics educator and arrangements were made in line with his suggestions. In addition, these prepared problems coincide with the achievements in the high school mathematics curriculum of the Ministry of National Education. The purpose of considering the curricula and studies in the literature is to increase the validity of the questions. In order to determine the symbol sense behaviors of the twelfth grade students, clinical interviews were conducted with the students through structured interview forms. Clinical interviews are interviews that are conducted to examine students' thoughts in depth. The main purpose of this type of interview is to determine the cognitive skills of the individual and to discover the richness of his thoughts by revealing the concepts that the individual has and the relationships between these concepts (Zazkis & Hazzan, 1998). From students with clinical interviews; performing the task in the structured interview form, explaining what their answer is for each task and how they arrived at this answer (think-aloud protocol), answering any additional questions needed ("How did you do that?", "Why?" and "Why?" Besides, additional questions about the content of the problem) were expected.

2.4. Data Analysis

In this study, the collected data were analyzed using the descriptive analysis technique, which is one of the analysis techniques in qualitative research methods. Descriptive analysis is the presentation of data with a descriptive approach, by sticking to the original formats of the data in qualitative analysis, by quoting directly from what people said, written and the contents of the documents (Kümbetoğlu, 2005). In this study, firstly, a framework for data analysis was created within the conceptual framework of the research. Then, the data obtained according to the general framework created in the previous stage were read and organized and the organized data were defined. Direct dialogues are included where necessary. In the last stage, the findings were explained and correlated. Code names (Öz, Öo, and Öi) were used to describe the participant students and the researcher in the presentation of the data. The data obtained were classified and analyzed according to the framework in Table 1, which was created by taking into account the indicators of symbol sense behaviors in previous studies in the literatüre (Arcavi, 1994, 2005; Darojaturrofiah, 2017; Jupri & Sispiyati, 2020; Rini, Hussen, Hidayati & Muttaqien, 2021; Tat, 2021).

The validity of the study was handled in two ways as external validity and internal validity. In order to ensure external validity in the study, the process of the study was explained in detail and presented in detail in the method section. In addition, the theoretical framework was clearly presented and an opportunity for discussion was provided. In order to ensure the internal validity of the study, a framework was created for data analysis and the data were analyzed accordingly. However, all of the concepts in the study are explained in detail. In order to ensure the validity of the study, a research model suitable for the determined research problem was selected and the findings of the research were presented in this direction. Direct transfers were made from the participants. The coding process was carried out in line with the determined theoretical framework, the coding was checked by different researchers and the agreement between the researchers was determined as .89. It is thought that the high level of agreement among researchers is due to the fact that the data analysis of the study was carried out through descriptive analysis and the theoretical framework was explained in detail.

Table 1. Symbol sense behaviors, indicators and problems

Symbol sense behaviors and indicators	The problem of symbol sense behaviors
Friendship with symbols: Knowing how and when to use symbols; Knowing when to abandon symbols; To be able to determine the meanings of the symbols in the problem; Writing symbols according to their meanings in the problem; Using symbols correctly at every step of problem solving	Problem 1: Find two positive integers whose sum is 7 and whose product is 7.
Reading and processing symbolic expressions: Expressing symbols in mathematical models created in the problem; Using mathematical models to solve problems; Explain the meaning of the mathematical model created in the problem	Problem 2: Find the solution set of the equation $\frac{5x+4}{10x+8} = 3$.
Designing symbolic expressions: Associating problems with symbols; To be able to successfully design the verbal and graphical information necessary for the solution of the problem.	Problem 3: Find the area of a rectangle with a length of 8 units and a perimeter of 36 units.
Symbol selection: Choosing the right symbol to solve the problem, Choosing the appropriate representation method of the chosen symbol in the problem; Using the chosen method to solve the problem.	Problem 4: Find three consecutive natural numbers whose sum is 978.
Checking the meaning of symbols/phrases: Proving the relevance of symbols used during the implementation of the problem solving procedure.	Problem 5: Find the solution set of the equation $38 - (1 - 2x)^2 = 13$.
Symbol Context: An explanation that the symbols used can have different meanings in different problems.	Problem 6: Find the solution set of the $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$ system of equations.

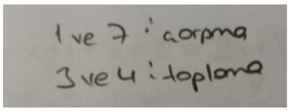
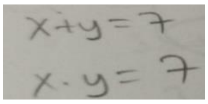
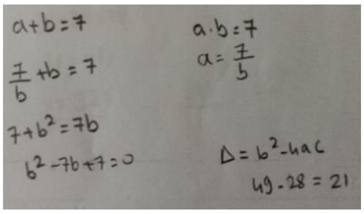
3. Findings and Discussion

The findings of the study are presented by considering six different symbol sense behaviors.

3.1. Findings on friendship behavior with symbols

Problem 1 was used to determine the friendship behaviors of students with symbols, and the solutions and mutual dialogues of three students with different success levels are presented in Table 2.

Table 2. Solutions and dialogues for Problem 1

Ö_Z: Since 7 are prime numbers in products, I know that 1 is only itself. There can be 3 and 4 or 1 and 6 in total. A: Is there anything you would like to add for this question? Ö_Z: So. I also like some shortcuts.	
Ö_O: The probability of being a rational number seems high. A: So how would you trade? Ö_O: It can be $x + y = 7$ and $x.y = 7$. The result may be rational. But I can't think of anything else. I leave it this way. I will not continue.	
$\text{Ö}_\text{İ}$: Since it says two positive numbers, I give them an unknown. I call someone "a", someone I call "b". Since their sum is 7, a+b=7 is also their product 7. So a.b=7. Here I would leave one alone and write the other in its place. A: What will you do next? $\text{Ö}_\text{İ}$: After doing the procedures, I would go to find the root. But it probably has no real root. I would use discriminant. There was a formula for finding one root. I couldn't remember, but two roots would come from that formula.	

When Table 2 is examined, the student of Ö_Z did not use any symbols in the solution of the problem, tried to answer the problem by thinking arithmetic, but gave an incorrect answer. For example, Ö_Z student thought of two positive numbers whose product and sum are 7 as different groups of numbers. From these data obtained, weak Ö_Z student did not show friendship behavior with symbols, since he tried to produce a solution to the problem by using both arithmetic reasoning and arithmetic representations (he does not use symbols) in the solution of the problem, that is, the symbol sense did not develop in the context of this behavior. In addition, it was observed that Ö_Z student could not mathematically present the information he deduced from the problems correctly and could not think in depth algebraically in applying and interpreting the mathematical findings. These results are similar to the study of Darojaturrofiah (2017). The $Ö_O$ student, on the other hand, used two different symbols such as x and y while solving the problem, but could not find the numbers corresponding to the symbols x and y. Since the $Ö_O$ student uses algebraic representations (symbols with letters x and y) for unknown quantities in the problem, this student is aware of how to use symbols to solve the problem. However, although the $Ö_O$ student has enough experience in showing relationships with symbols, it is understood that this student's symbol sense is not fully developed. Because another indicator of the lack of symbol sense is that students initially want to use algebraic symbols but are not aware of what they are looking for. The $Ö_İ$ student, on the other hand, used the letters a and b to represent two unknown positive integers, and created a system of equations as $\begin{cases} a+b=7 \\ a\cdot b=7 \end{cases}$. However, the student reduced the first-degree system of equations with two unknowns to a quadratic equation with one unknown with the help of the substitution strategy, but could not reach the solution because he could not remember the formulas required for solving the quadratic equations. The student stated that two roots will come from the solution of this equation. In this sense, the $Ö_İ$ student benefited from both algebraic reasoning and algebraic representations in solving the problem. The student demonstrated the ability to decide how and when to use symbols in the solution process, that is, one of the indicators of friendship behavior with symbols. Instead of throwing the symbols aside, this student reduced the equation to a single unknown by equating the expression a to $\frac{7}{b}$, so that he was not drowned in the system of equations. This corresponds to the indicator of "requires knowing when to give up a symbol for a better practice", which is one of the indicators of friendship behavior with symbols. As a matter of fact, Arcavi (1994; 2005) emphasized that a student with symbol sense should anticipate when he will need a symbol in the problem solving process, and on the contrary, he should know when to give up a symbol for better manipulation. In addition, according to Arcavi (1994; 2005), students who both know how to do algebraic manipulations and can establish the connection between the context of the problem and the symbols they choose are students with a developed symbol sense. In this sense, when compared to the other two students, the $Ö_İ$ student exhibited the friendship behavior with symbols at the expected level for this problem.

3.2. Findings on using symbolic expressions and reading behavior

Problem 2 was used to determine the students' use of symbolic expressions and reading behaviors, and the solutions and dialogues of three different students are presented in Table 3.

Table 3. Solutions and dialogues for Problem 2

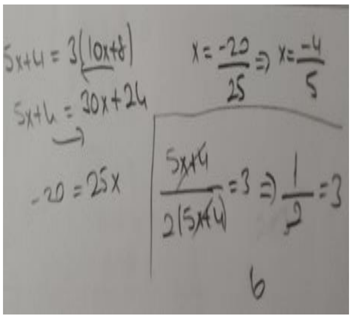
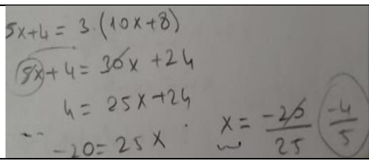
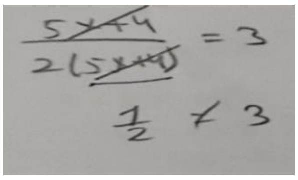
$Ö_Z$: Actually, we can simplify this. But should I do it directly? A: What do you call a shortcut? $Ö_Z$: Inside-out product. A: Does it come to you as a shortcut? $Ö_Z$: So. [After the student solves the question and finds the answer $\frac{-4}{5}$, the following dialogue takes place between the researcher and the student.] $Ö_Z$: I think I got it wrong. A: Why did you feel you got it wrong? $Ö_Z$: I don't know, it was very strange. A: What is the reason for coming strange? $Ö_Z$: Because the rational number comes. When it is a rational number, it seems to be wrong. A: Do you have any other comments on this question? $Ö_Z$: So we could actually simplify it. Because we could put it in parentheses. We could put $10x+8$ in parenthesis 2. Let me try that. A: What would it be like then? $Ö_Z$: I think I made a mistake. Is there any chance of getting back to this again by looking at the result it finds? A: Of course. So what are you stuck on? Is it because the results are different? $Ö_Z$: Yes.	
$Ö_O$: Here, I used to do the inside-outside product directly. A: If you could think of another solution here, how would you do it? [Student examines question…] $Ö_O$: I used to do the inside-outside product directly.	

Table 3 continued

Ö$_{\text{İ}}$: When I look at it, I see that the denominator is twice the numerator. Then I would put the denominator in parenthesis 2.
A: Did you see this at first glance in the question?
Ö$_{\text{İ}}$: Yes.
A: Super.
Ö$_{\text{İ}}$: What would I do now? Actually, the expressions $5x + 4$ cancel each other out. I would take these. But $\frac{1}{2} = 3$ is coming. I would say that the solution set is the empty set. There is no empty set. There is no solution set. So the question is wrong.
A: Did the inside-out product come to mind when you first looked at the question?
Ö$_{\text{İ}}$: No, it did not come.



When Table 3 was examined, it was determined that Ö$_{Z}$ and Ö$_{O}$ students directly multiplied inside-out to solve the equation. This is probably the possible solution that many students will do. In other words, both students could not read the equation and directly manipulated the equation and reached the solution $\frac{-4}{5}$. However, both students did not control the $\frac{-4}{5}$ value they obtained. In other words, Ö$_{Z}$ and Ö$_{O}$ students automatically solved simple algebraic equations as in problem 2 in a standard way, that is, instinctively as taught in the lesson. However, Ö$_{Z}$ student felt that she was wrong, tried to operate by putting the denominator in parenthesis 2, got the result of $\frac{1}{2} = 3$, and went further and stated that the result was 6. However, Ö$_{Z}$ student could not interpret this result. In other words, the student of Ö$_{Z}$ remained in contradiction in the face of the results he obtained and he wanted to return to the solution again. In this sense, both students did algebraic operations without thinking, but could not read the equation consisting of symbolic relations. Arcavi (1994) emphasized that more than standard manipulations are needed to solve an algebraic equation or achieve the desired result, he stated that this need is reading or noticing symbolic relationships, and argued that this situation is related to the development of the symbol sense. In this sense, both Ö$_{Z}$ and Ö$_{O}$ students failed to read the meaning of symbolic expressions. In other words, Ö$_{Z}$ and Ö$_{O}$ students do not have the understanding that "*no matter what x is, the numerator is half of the denominator, so this equation has no solution*". As stated in the study of Jupri and Sispiyati (2020) for this problem, students with low and medium achievement levels did not read the equation to understand it. On the other hand, when the Ö$_{\text{İ}}$ student read the equation, he saw that the denominator was twice the numerator and claimed that the equation had no solution. In other words, the Ö$_{\text{İ}}$ student read the equation before performing manipulations to solve the equation, noticed that the left side of the equation was $\frac{1}{2}$ and the right side was equal to 3, and stated that there was no solution. Arcavi (1994) stated that a problem requires students to understand the problem before performing the solution process and emphasized that the goal of manipulations is to read symbols. As a matter of fact, the Ö$_{\text{İ}}$ student also exhibited a similar behavior in terms of symbol sense. In this sense, it is understood that the Ö$_{\text{İ}}$ student has the behavior of reading a symbolic expression that is related to the symbol sense skill.

3.3. Findings on the behavior of designing symbolic expressions

Problem 3 was used to determine the behaviors of students to successfully organize or design symbolic relationships from contexts including verbal, visual and graphical representations, and the solutions and dialogues of three different students are presented in Table 4.

Table 4. Solutions and dialogues for Problem 3

Ö$_{Z}$: I said x to the shorter side because it said its length is 8 cm longer than its width. Then the long side is $x + 8$. To find its perimeter, I add two x and two $x + 8$ since there are two short sides and two long sides. This is $4x + 16$ which is equal to 36, so I found x to be 5. Then I found the side lengths of 5 and 13 and calculated the area as 65 square units.
A: In what other way would you solve this question?
Ö$_{Z}$: Actually, we could think of 36 as a square. I think we could have done it by thinking of it as a square rather than a rectangle and then adjusting those extras.
A: Can you explain this idea a little more?
Ö$_{Z}$: It was said in the question that its circumference is 36 units. In other words, after dividing 36 into four as if it were a square and writing the result found on the sides, we could adjust the extra 8. But then I think it would have taken longer.
A: Did you first think of x as unknown? Would you use another variable?
Ö$_{Z}$: Actually, x did not come directly, but since we always wrote x for years, that may be why.

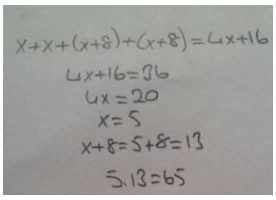
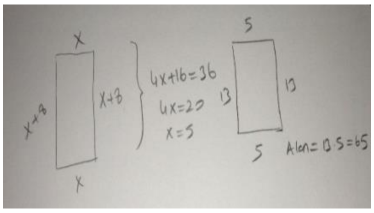
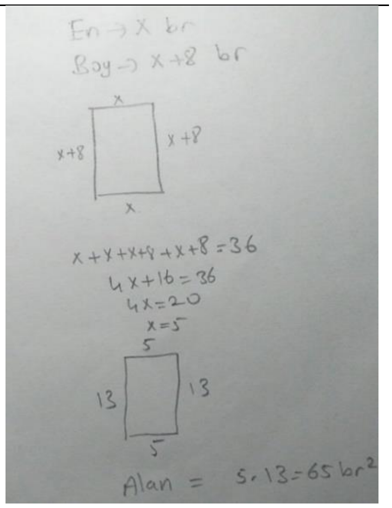


Table 4 continued

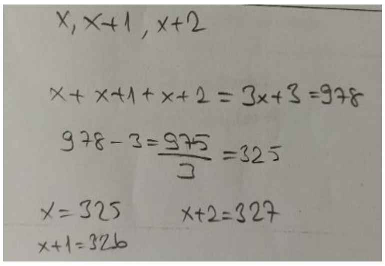
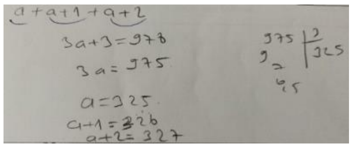
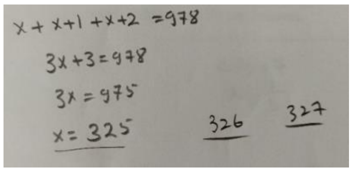
Ö$_\text{O}$: If its height is 8 cm longer than its width, if we call its height $x + 8$, its width will be x. Their sum equals 36. [Student took action as below...9] Ö$_\text{O}$: From here, x is 5. Then, if we substitute 5 for x, we get a thirteen-five rectangle. To find the area, we multiply 13 by 5 to get 65. A: In what other way would you solve this question? Ö$_\text{O}$: I would solve it this way again. I wouldn't have solved it any other way. Because this way seems more precise and clear to me. A: Did you first think of x as unknown? Would you use another variable? Ö$_\text{O}$: I wouldn't use any other variable. Again I would solve it using x.	
Ö$_\text{İ}$: The first thing that came to my mind was to use x. Because in mathematics, x is often used as an unknown. When I read the question, I call the rectangle x in width and $x + 8$ in length, since its length is 8 units more than its width. I write them on the edges of this shape. He already gave us the circumference of 36 units in the question. The environment is the sum of them. [The student found x by doing the following operation...] A: Yes, let's continue. Ö$_\text{İ}$: In other words, it is unknown 5. Since its height is 8 units more than its width, then its length will also be 13. He asks for his field. To find the area of a rectangle, we multiply its short side by its long side. So from 5 times 13, the answer is 65 square units. A: Did you first think of x as unknown? Would you use another variable? Ö$_\text{İ}$: Since x is generally used as an unknown in mathematics, I also preferred to use x. A: In what other way would you solve this question? Ö$_\text{İ}$: I could use more than one unknown rather than a single unknown. For example, if I said x in width, I would say y in length. So I could do it this way. But I would still prefer to do the first solution.	

According to the information in Table 4, it is understood that all three students have the ability to create symbolic relationships from verbal or graphical information. All of the students tried to reach the solution by creating symbolic expressions from verbal expressions and solving these mathematical expressions instead of using trial and error strategy or similar strategies. For example, Ö$_\text{Z}$ student used the symbol x for the short side length and expressed the long side as $x + 8$, taking into account the short side length. Then, using the expression x+$x + x + 8 + x + 8 = 4x + 16 = 36$, he found $x = 5$ and found the area of the rectangle as 65 square units. Ö$_\text{O}$ and Ö$_\text{İ}$ students, on the other hand, changed the verbal expression to the rectangular visual and switched to symbolic representation by making use of the rectangle. In this sense, all three students exhibited this behavior of symbol sense. At the same time, the ability to transform the problem situation into symbolic representation or the mathematization process characterizes the symbol sense behavior (Jupri & Drijvers, 2016).

3.4. Findings on symbol selection behavior

Problem 4 was used to determine the students' behavior of choosing a possible symbolic representation for a problem, and the solutions and dialogues of three different students are presented in Table 5.

Table 5. Solutions and dialogues for Problem 4

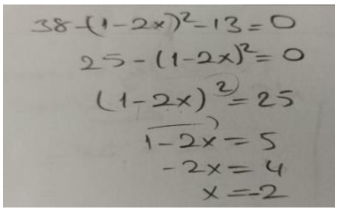
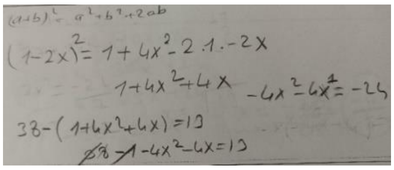
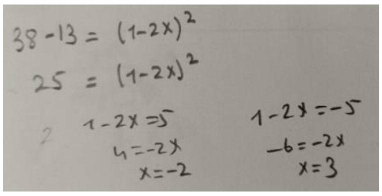
Ö$_Z$: I think it might be a number of 300 then. Or 200's. A: Why do you think so? Or how do you intend to solve the question right now? Ö$_Z$: I would first give $x, x+1, x$ +2 here. A: What is your reason for giving this? Ö$_Z$: Because he played a number between them. There will be two increments from the first number to the last number. So sequential, by that logic. A: So, are you always giving unknowns this way in consecutive numbers? Ö$_Z$: Yes. A: Do you usually use this for questions like this? Ö$_Z$: I use this way. A: What do you usually do? Ö$_Z$: I would usually go for the guesswork. For example, chicks. A: But if there are no options as in this question. Ö$_Z$: It is obvious that it is sequential. Most likely, since it's 9, it's either 2 or 3. I'd go with the totals. That's how I would find it by adding the other two numbers. A: Which one is more practical for you? Ö$_Z$: Solving by equation…	
Ö$_O$: Now if I say a to the first number. The other number is $a+1$. The third count, that is, the largest count, will be $a+2$. [The student then finds the small, median and large number using these symbolic expressions] A: Do you always use these expressions when you are called a sequential number? Ö$_O$: Yes. This is what comes to my mind first.	
Ö$_İ$: Since it says sequential, like 1, 2, 3. I would go from the unknown again. If I said x to one, I would say $x+1$ to the other and $x+2$ to the other. A: Do you always define consecutive numbers this way? Ö$_İ$: Or something like $x, x-1, x+1$ or $x, x-1, x-2$. A: So they can be? Ö$_İ$: Yes. Because it's sequential.	

When Table 5 is examined, it can be said that all three students exhibited the behavior of choosing symbols for the solution of a given problem situation. For example, Ö$_Z$ student reached the solution by choosing the symbols $x, x+1, x+2$ for three consecutive numbers in the problem. However, the student of Ö$_Z$ stated that in solving such problems, especially the elegant ones, he generally made predictions and made use of the trial and error strategy to find solutions to the problems. Another situation that draws attention in the dialogue of the student of Ö$_Z$ is that his student constantly chooses symbols as $x, x+1, x+2$ in such questions. In this sense, it can be said that Ö$_Z$ student exhibits a memorized understanding in symbol selection or does not display a conscious symbol selection behavior. The Ö$_O$ student also exhibited a similar behavior to the Ö$_Z$ student, choosing the symbols $a, a+1, a+2$ for three consecutive numbers and chose the correct symbol for the solution of the problem. The Ö$_O$ student also stated that he generally used these symbols in such questions. The Ö$_İ$ student stated that both $x, x+1, x+2$ and $x, x-1, x-2$ and $x, x-1, x+1$ symbols can be chosen for the solution of the problem. According to Arcavi (1994), symbol selection is not binding in terms of results, and the student can choose symbols in different ways to solve the problem if he/she wishes or sees the symbol selection insufficient. Especially students with a developed symbol sense can make more appropriate symbol selections to simplify their calculations. In this sense, it is understood that the Ö$_İ$ student exhibits the behavior of choosing a possible symbolic representation for a given problem and even exhibits a more flexible and efficient symbol selection skill than the other two students. Especially for the solution of such problems, the most useful symbol selection is $x-1, x, x+1$, and this is closely related to the mathematization process (Jupri & Drijvers, 2016).

3.5. Findings on behavior of checking the meaning of symbols/ expressions

The solutions and dialogues of three different students related to this problem, which is designed according to the realization feature of the need to check the meanings of symbols or mathematical expressions in the problem solving process, are presented in Table 6.

Table 6. Solutions and dialogues for Problem 5

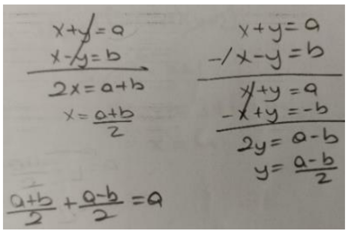
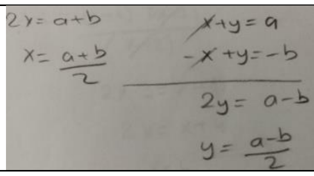
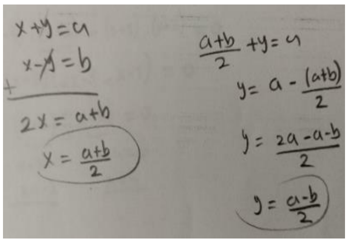
A: How do you solve this problem? Ö$_Z$: Right now, if we throw 13 this way, that is 38, then the equation will be equal to zero. Now $(1-2x)^2$ equals 25. From here, $1-2x=5$ is written. Then there is only one root of the form $x=-2$. A: Are you sure? Ö$_Z$: Yes [The student is verifying the transaction.] A: That's your solution for this question? Will you continue? Ö$_Z$: That's it.	
A: How do you solve this problem? Ö$_O$: I would distribute the minus first. No, no, I would square it first. . A: What will you do next? Ö$_O$: I'm confused, that's it for me. [After doing the following solution, the student got confused and stopped calculating before finding x.]	
A: How do you solve this problem? Ö$_İ$: First, I throw 13 to the opposite side and the square expression to the other side. A: Yes, let's continue. Ö$_İ$: Now, since it is a square here, we will consider it as an absolute value. So if we think about what is 25 squared, it can be -5 or +5. We can even write it as an absolute value. [The student then found the roots as -2 and 3 by performing the operations shown in the figure.]	

According to Jupri and Sispiyati (2020), realizing the need to control the meanings of symbols or mathematical expressions in the problem-solving process is one of the symbol sense behaviors. In this context, when Table 6 was examined, it was determined that the Ö$_O$ student tried to solve the equation by writing the expression $(1-2x)^2$ directly as $1+4x^2-4x$, but he confused the operational processes and therefore he was confused. Ö$_Z$ and Ö$_İ$ students checked the equation and tried to solve the equation from an arithmetic point of view. However, while the equation created by student Ö$_Z$ is $38 - ? - 13 = 0$, the structure created by student Ö$_İ$ is $38 - ? = 13$. The perspective of these two students leads to the equation $(1-2x)^2 = 25$. However, in the solution of this quadratic equation, while the Ö$_Z$ student obtained a single root, the Ö$_İ$ student correctly found the roots of $x=-2$ and $x=3$ from the equations $1-2x=5$ and $1-2x=-5$. In this sense, both Ö$_Z$ and Ö$_İ$ students showed the behavior of proving the appropriateness of the symbols used during the implementation of the problem solving procedure. The ability to recognize the meaning of an algebraic expression is also related to the ability to manipulate and read symbolic expressions in problem solving, which is one of the other symbol sense behaviors (Arcavi, 1994). As Jupri and Sispiyati (2020) stated, it is important to use such problems to evaluate students' conceptual and relational understanding of equations. As a result of the study of Bağdat and Anapa Saban (2014), it was seen that the students with low achievement level had the most difficulty in using symbols and algebraic relations, and the algebraic thinking skills of the students with high achievement level were higher than the other students. Similar results were obtained in this study. In this study, the student with a high level of success had no difficulty in solving the algebraic equation questions, while the student with a low level of success had difficulties. This result is similar to the result of Netriwati (2016) study, that students with high algebraic prior knowledge can understand and solve problems accurately and fluently, while students with low algebraic prior knowledge have difficulty in problem solving stages.

3.6. Findings on symbol context behavior

This problem, which was designed according to the ability to recognize that symbols can have different meanings (unknown, variable, parameter, etc.), was used to determine the symbol context behavior of the students and the solutions and dialogues of three different students are presented in Table 7.

Table 7. Solutions and dialogues for Problem 6

$\ddot{O}_Z$: Actually, we can do it with the method of destruction. [Student did the following solution] A: What do the letters x, y, a, b here mean to you? Are these unknown to you? Is it a letter? Is it a number? $\ddot{O}_Z$: As if it could be a coefficient. A: Like which ones? How about for x? What do you think for y? Can you say for each letter one by one? $\ddot{O}_Z$: I think x stands for a number here. y can also be a number. Because it's the sum of numbers and numbers. Or the sum of a multiple. a and b stand for numbers. A: Then all numbers are for you… $\ddot{O}_Z$: Yes. Shouldn't it have given any number for it to be unknown? A: Your comment is important here. $\ddot{O}_Z$: For example. The sum of $x + y$ is any number 5 or 7, I don't know? So it could be something like $y = a$ by giving x. All numbers are unknown.	
A: Can you tell me the relationship between x, y, a, b? Are these unknown to you? Is it a letter? Is it a number? $\ddot{O}_O$: x is unknown… y is also unknown… a and b are also unknown. All unknown to me. [The student does something like the following after this dialogue..]	
A: What do you think of x, y, a, b here? Do you think these are unknowns, letters or numbers? $\ddot{O}_İ$: I think x and y are unknown and a and b are like numbers. Usually that's what happens all the time. A: Is it because it usually happens or do you have a specific comment for this question? $\ddot{O}_İ$: That is, because we always use x and y as unknowns. A: For example, if I said x and y to the right side of the equation, and a and b to the left side, then which unknown do you think would be? $\ddot{O}_İ$: Then I would see a and b as unknowns. A: Why do you think they are unknown? $\ddot{O}_İ$: So the result is usually equal to a number. We are solving unknown equations. The unknown is often in the equation, not the result. The result usually equals a number. [The student does something like the following after this dialogue…]	

Students are expected to be able to distinguish between variables and parameters in order to find a solution to this problem (Arcavi, 1994; Jupri and Sispiyati, 2020). That is, students should consider x and y as variables and a and b as parameters. When Table 7 is examined, it is understood that all of the students solved the equation system correctly using the elimination method. However, the weak $\ddot{O}_Z$ student stated that all symbols with letters x, y, a and b are placeholders for numbers. The $\ddot{O}_O$ student said that all symbols with letters x, y, a and b are unknowns. In this sense, both $\ddot{O}_Z$ and $\ddot{O}_O$ students are not aware that the symbols used in the context have different meanings. $\ddot{O}_İ$ student stated that x and y are unknowns and a and b are numbers. In fact, the $\ddot{O}_İ$ student stated that a and b may be unknowns depending on the problem situation. In fact, although the $\ddot{O}_İ$ student's statements about a and b point to the concept of parameter, there is no emphasis on the concepts of variables or parameters during the dialogue. In this sense, it can be said that not all students exhibit symbol context behavior. However, the fact that the $\ddot{O}_İ$ student stated that these symbols can play different roles in a different problem showed that the student exhibited symbol context behavior, albeit a little. Arcavi (1994) stated that this behavior related to symbol sense (anticipating the awareness that symbols can have different meanings (unknown, variable, parameter, etc.)) will play an important role in awareness about operations involving symbols. Sfard (1992) and Moschkovich, Schoenfield, and Arcavi (1993) emphasized that this awareness requires an understanding of ordering the meaning differences of symbols and coping with different mathematical objects and operations depending on the context. In this sense, it was determined that all three students had insufficient understanding of the different meanings of letter symbols.

4. Conclusion and Recommendations

The student of $\ddot{O}_Z$, who did not use any symbols in the solution of the first problem, tried to find a solution to the problem by using both arithmetic reasoning and arithmetic representations. For this reason, the student did not show friendship behavior with symbols, that is, the symbol sense did not develop in the context of this behavior. The $Ö_O$ student, on the other hand, used two different symbols such as x and y while solving the problem, but could not find the numbers corresponding to the symbols x and y. Therefore, the $Ö_O$ student is aware of how to use symbols to solve the problem. However, although the $Ö_O$ student has enough experience in showing relationships with symbols, it is understood that this student's symbol sense is not fully developed. On the other hand, the student of $Ö_İ$ created a system of equations by using the letters a and b to represent two unknown positive integers. The student reduced the first-degree system of equations with two unknowns to a quadratic equation with one unknown with the help of the strategy of substitution, but could not reach the solution because he could not remember the formulas required for solving the quadratic equations. However, the student stated that two roots will come from the solution of this equation. In this sense, the $Ö_İ$ student benefited from both algebraic reasoning and algebraic representations in solving the problem. The student demonstrated the ability to decide how and when to use symbols in the solution process, that is, one of the indicators of friendship behavior with symbols. Instead of throwing the symbols aside, this student reduced the equation to a single unknown by equating the expression a to $\frac{7}{b}$, so that he was not drowned in the system of equations. This corresponds to the indicator of "*requires knowing when to give up a symbol for a better practice*", which is one of the indicators of friendship behavior with symbols. In this sense, compared to the other two students, the student of $Ö_İ$ displayed the friendship behavior with symbols at the expected level for this problem.

In the solution of the second problem, like the possible solutions that many students would probably make, $Ö_Z$ and $Ö_O$ students directly made inside-out multiplication to solve the equation and directly manipulated the equation to reach the solution $x = \frac{-4}{5}$. However, $Ö_Z$ student felt that she was wrong, tried to operate by putting the denominator in parenthesis 2, got the result of $\frac{1}{2} = 3$, and went further and stated that the result was 6. In this sense, both students did algebraic operations without thinking, but could not read the equation consisting of symbolic relations. On the other hand, when the $Ö_İ$ student read the equation, he saw that the denominator was twice the numerator and claimed that the equation had no solution. In other words, the $Ö_İ$ student read the equation before performing manipulations to solve the equation, noticed that the left side of the equation was $\frac{1}{2}$ and the right side was equal to 3, and stated that there was no solution. In this sense, it is understood that the $Ö_İ$ student has the behavior of reading a symbolic expression that is related to the symbol sense skill, while the students of $Ö_Z$ and $Ö_O$ do not.

In the solution of the third problem, all of the students tried to reach the solution by creating symbolic expressions from verbal expressions and solving these mathematical expressions instead of using trial-and-error strategy or similar strategies. $Ö_O$ and $Ö_İ$ students, on the other hand, changed the verbal expression to the rectangular visual and switched to symbolic representation by making use of the rectangle. In this sense, it is understood that all of the students exhibit the behavior of successfully arranging or designing symbolic relationships from contexts that include representations such as verbal, visual and graphical.

Stating that problems similar (especially in the solution of the elegant ones) to the fourth problem generally produce solutions by making estimations and utilizing trial and error strategy, student $Ö_Z$ stated that he always prefers the symbols $x, x+1, x+2$ for three consecutive numbers in solving such problems. The $Ö_O$ student also exhibited a similar behavior to the $Ö_Z$ student. In this sense, it can be said that $Ö_Z$ and $Ö_O$ students exhibit a memorized understanding in symbol selection or do not exhibit a conscious symbol selection behavior. Expressing that there may be different symbol choices $(x, x+1, x+2\ ;\ x, x-1, x-2\ ;\ x, x-1, x+1)$ for the solution of the problem, the student of $Ö_İ$ showed more flexible and efficient symbol selection skills than the other two students.

In the solution of the fifth problem, it was determined that the $Ö_O$ student confused the procedural processes with each other, therefore he experienced confusion. $Ö_Z$ and $Ö_İ$ students checked the equation and tried to solve the equation from an arithmetic point of view. However, while the equation created by student $Ö_Z$ is $38 - ? - 13 = 0$, the structure created by student $Ö_İ$ is $38 - ? = 13$. The perspective of these two students leads to the equation $(1-2x)^2 = 25$. However, in the solution of this quadratic equation, the student of $Ö_Z$ found a single root, while the student of $Ö_İ$ found both roots correctly. In this sense, both $Ö_Z$ and $Ö_İ$ students showed the behavior of proving the appropriateness of the symbols used during the implementation of the problem solving procedure.

In the solution of the sixth problem, it is understood that the students correctly solved the system of equations by using the whole elimination method. However, while the student $Ö_Z$ stated that all symbols with letters x, y, a and b are placeholders for numbers, the student of $Ö_O$ stated that all of these symbols are unknowns. In this sense, both $Ö_Z$ and $Ö_O$ students are not aware that the symbols used in the context have different meanings. $Ö_İ$ student stated that x and y are unknowns and a and b are numbers. In fact, the $Ö_İ$ student stated that a and b may be unknowns depending on the problem situation. Although the statements of the $Ö_İ$ student about a and b point to the concept of parameter, there is no emphasis on the concepts of variables or parameters during the dialogue.

In this sense, it was determined that all three students had insufficient understanding of the different meanings of letter symbols. However, the fact that the $Ö_İ$ student stated that these symbols can play different roles in a different problem showed that the student exhibited symbol context behavior, albeit a little.

As a result, in the context of the problems used in this study, student $Ö_İ$ with a high level of achievement exhibited the symbol sense behaviors at the expected level compared to the students of $Ö_Z$ and $Ö_O$, whose achievement levels were low and moderate. As a matter of fact, in Kenney (2008) and Darojaturrofiah (2017) studies, it was determined that students with high levels of success preferred symbols with letters in solving problems, and that these students exhibited a large part of symbol sense behaviors in order to obtain the solution of the given problem. In this study, only six different symbol sense behaviors of 12th grade students were focused on equations and verbal problems. For this reason, it is important to use different types of problems in order to determine the symbolsense behaviors of students at secondary or high school levels depending on the relevant content of mathematics. In addition, with the equations and word problems used in this study, students can be subjected to both formative and summative assessments.

Problem Çözme Sürecinde 12. Sınıf Öğrencilerinin Sembol Hissi Davranışlarının İncelenmesi

1. Giriş

Russell'e göre matematik, sembol ile mantığın birleşimidir (Speaks, 2004). Matematik, doğal dilden, sembollerden, grafiklerden, vb. oluşmuş sembolik bir sistem olduğundan bir dil olarak kabul edilebilir (Drouhard &Teppo, 2004). Bu nedenle matematikte, insanların düşünme sürecini yansıtmak, ifade etmek ve iletişim kurmak için semboller kullanır. Matematiksel varoluşun somut örnekleri olan semboller, insanların problemleri ifade etmeleri, hesaplamaları, akıl yürütmeleri, iletmeleri ve çözmeleri için gerekli olan araçlar (Hui, 2006) olmalarının yansıra dünyayı anlamak için de çok önemlidir (Goldin, 1987). Özellikle sembollerle akıl yürütmeye doğru ilk büyük adım problem çözme bağlamında atılmıştır. Günlük yaşamda ve matematikte karşılaştığımız problemleri çözmek ve durumları modellemek için güçlü araçlar olan semboller, cebir öğrenme alanının yansıra matematiğin diğer pek çok alanının öğretiminde de gereklidir ve bundan dolayı çok özel bir yere sahiptir (Lins, 1992). Öğrencilerin cebiri öğrenebilmeleri için, sembollerin kullanımı hakkında daha derin bir anlayışa sahip olmaları gerekir ve bu derin anlayışa ise "sembol hissi" denir (Darojaturrofiah, 2017).

Sayı hissinin mantıksal bir uzantısı olan sembol hissi (Pierce & Stacey, 2001); sembollere, ifadelere ve formüllere anlam verme ve önemli yapıları görme yeteneğini ifade eder (Arcavi, 1994, 2005; Drijvers, 2003). Sembol hissi, cebirde yeterliliği gösteren bir anlayış olarak kabul edilir ve sadece işlemsel bir anlamdan ziyade ilişkisel bir anlam gösterir (Jupri & Sispiyati, 2020). Fey (1990) sembol hissini, sembolik ifadeler ve cebirsel işlemlerle etkili bir şekilde başa çıkmak için gereken sezgisel bir anlayış veya içgörü olarak tanımlamaktadır. Keller (1993) ise sembol hissini kişinin sembolik ifadeler ve işlem özelliklerini ilişkilendirmesini sağlayan iyi organize edilmiş bir kavramsal ağ olarak tanımlamaktadır. Arcavi'ye (1994) göre sembol hissi; ilişkileri, genellemeleri ve kanıtları göstermek için sembollerin nasıl ve ne zaman kullanılması gerektiğinin anlaşıldığı, sembollerin gücü için estetik bir his veya anlayış biçimidir. Arcavi (1994) sembol hissi kavramıyla ilgili açık bir tanım yapmak yerine sembol hissi davranışlarını tanımlamaya ve tartışmaya odaklanmanın daha akıllıca olduğunu belirtmiştir.

Sayı hissinde olduğu gibi sembol hissi de bu hissi içeren ve bu hissin gelişimine yardımcı olan davranışlar veya deneyimler ile tanımlanmaktadır (Kenney, 2008). Örneğin, Driscoll (1999) sembol hissi davranışlarını; sembollere ne zaman ihtiyaç duyulduğunu ve ne zaman gereksiz olduklarını bilme, sembollerin anlamını yorumlayabilme, cebirsel manipülasyonları kontrol etme ve sonucu tahmin etme, bir dizi sayıya, tabloya ve grafiğe bakarak cebirsel temsilleri veya örüntüleri tahmin etme, cebirsel temsilleri görme ve bunları tablolarda, grafiklerde ve sembolik dilde nasıl ifade edileceğini bilme olarak tanımlamıştır. Pierce ve Stacey (2001) sembol hissi davranışlarını; ilişkileri ifade etmek için sembolleri kullanma, sembolün ne zaman kullanılacağına ve sembole farklı şekillerde nasıl yaklaşılacağına dair bir anlayış geliştirme, eşdeğer sembolik ifadeleri tanıma, belirli bir problem durumunda veya ötesinde sembollerin anlamını yorumlayabilme şeklinde ifade etmiştir. Arcavi (2005) ise sembol hissi davranışlarını aşağıdaki gibi açıklamış ve bu altı davranışı birbiriyle ilişkili ve yakından bağlantılı olduğuna vurgu yapmıştır:

- ✓ *Sembollerle dostluk:* Sembollerin anlaşılması ve sembollerin gücünü hissedebilmektir. Gizli ve görünmeyen ilişkileri, genellemeleri ve diğer kanıtları göstermek için sembollerin nasıl ve ne zaman kullanılması gerektiğini bilme.
- ✓ *Sembolik ifadeleri okuma ve kullanma:* Sembolleri okuma ve aynı zamanda kullanma yeteneği, cebirsel problemleri çözmenin iki tamamlayıcı yönüdür. Öğrencilerin, cebirsel problemlerle karşılaştıklarında, var olan sembolleri anlamaları.
- ✓ *Sembolik ifadeleri tasarlama*: Bir problemde ilerleme sağlamak için gereken sözlü veya grafiksel bilgileri ifade eden sembolik ilişkileri başarılı bir şekilde düzenleyebileceğinin farkında olma ve bu ifadeleri tasarlama.
- ✓ *Sembol seçimi:* Sembolleri belirli değişkenlere atama örneğinde olduğu gibi bir problem için olası sembol temsillerinden birini seçme.
- ✓ *Bir prosedürün uygulanması sırasında sembollerin anlamlarının kontrol edilmesi:* Bir prosedürün uygulanması, bir problemin çözümü veya sonuçların incelenmesi sırasında veya öncesinde sembollerin anlamını kontrol etme ve sembol anlamının kişinin beklenen sonuç hakkındaki sezgisiyle karşılaştırılması.
- ✓ *Sembol bağlamı:* Sembollerin farklı bağlamlarda (bilinmeyen, değişken, parametre gibi) farklı rolleri olabileceği bilinci.

Sembol hissi üzerine uluslararası alan yazında ilkokul (Lamb, Bishop, Philipp, Schappelle, Whitacre & Lewis, 2012; Papadopoulos, 2019), ortaokul (Cho & Song, 2010; Tabach, Arcavi & Hershkowitz, 2008), lise (Kop, Janssen, Drijvers & Van Driel, 2020; Pope & Sharma, 2001) ve lisans düzeyinde (Kenney, 2008; Pierce & Stacey, 2004) gerçekleştirilen çalışmalar genel olarak sembol hissi ile ilgili teorik çalışmalarla (Arcavi, 1994, 2005; Fey, 1990; Jupri & Sispiyati, 2020; Keller, 1993; Yu-xin, 2002; Zhu, Hu & Ma, 2017), sembol hissi ile ilgili uygulamalarla (Kenney, 2008; Kop vd., 2020; Lamb vd., 2012; Pope & Sharma, 2001; Sugilar, Kariadinata & Sobarningsih, 2019) ve sembol hissinin gelişimini katkı sağlayacağı ifade edilen teknolojik araçların kullanımı (Bokhove & Drijvers, 2010; Gierdien & Olivier, 2013; Kenney, 2008; Papadopoulos, 2019; Pierce & Stacey, 2004) ile ilgilidir. Uluslararası literatürde bu denli çalışma olmasına rağmen ülkemizde sembol hissi ile ilgili çok az çalışma vardır (Tat, 2021). Bu nedenle çalışmanın ulusal ve uluslararası alanda sembol hissiyle ilgili yapılan araştırmaların genişletilmesine, sembol hissinin analiz ve değerlendirme çerçevesinin oluşturulmasına, sembol hissi ilgili teorik bilgilere katkıda bulunulmasına, sembol hissi ile ilgili olarak öğretmen uygulamalarına ve matematikte sembol hissini geliştirmek için destek sunmaya katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca National Research Council [NRC] (1989) göre, ortaokul ve lise matematiğin temel hedefi sembol hissini geliştirmek ve sayı hissinin gelişimine devam etmek olmalıdır (Keller, 1993). Bu nedenle sembol hissi ile ilgili hem ortaokul hem de lise seviyesinde yapılan çalışmalar ülkemiz matematik öğretim programına katkı sağlayacaktır. Bu bağlamda çalışma ile 12. sınıf öğrencilerinin problem çözerken sergiledikleri sembol hissi davranışlarının derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır.

2. Yöntem

2.1. Araştırmanın Deseni

Betimlemelerin ve anlamların derinliğini ortaya çıkarmayı amaçlayan nitel araştırma (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz & Demirel, 2017) desenine sahip bu araştırmada, 12.sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde sergiledikleri sembol hissi davranışlarını derinlemesine incelendiğinden, araştırma durum çalışmasıdır. Creswell (2017)'e göre durum çalışması; araştırmacının zaman içerisinde sınırlandırılmış bir veya birkaç durumu çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları ile derinlemesine incelediği, durumların ve duruma bağlı temaların tanımlandığı nitel bir araştırma yaklaşımıdır.

2.2. Örneklem

Araştırma, Gümüşhane ilinde yer alan bir lisenin 12. sınıfında öğrenim gören üç öğrenci ile yürütülmüştür. Üç öğrenciden oluşan araştırmanın çalışma grubunu belirlemek için amaçlı örnekleme yöntemlerinden "maksimum çeşitlilik" örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Buradaki amaç, göreli olarak küçük bir çalışma grubu oluşturmak ve bu grupta çalışılan probleme taraf olabilecek öğrencilerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır. Amaç genelleme yapmak için çeşitliliği sağlamak değildir; tam tersine çeşitlilik gösteren durumlar arasında ortak ya da paylaşılan olguların ve ayrılıkların olup olmadığını bulmaya çalışmak ve çeşitliliğe göre problemin farklı boyutlarını ortaya koymaktır (Yıldırım & Şimşek, 2005). Bununla birlikte maksimum çeşitlilik yöntemi, incelenen olay veya olguyla ilişkili çok sayıda farklılığı kapsayan ana temaları keşfetmeyi ve tanımlamayı amaçlamaktadır (Neuman, 2014). Bu amaç doğrultusunda öğretmenin tavsiyesi de dikkate alınarak öğrencilere bir cebir testi uygulanmış ve öğrenciler akademik başarılarına göre zayıf, orta ve iyi olmak üzere üç düzeye ayrılmıştır. Verilerin sunumunda zayıf, orta ve iyi başarı düzeyindeki öğrencileri nitelemek için sırasıyla $Ö_z$, $Ö_o$ ve $Ö_i$ kod isimleri kullanılmıştır.

2.3. Veri toplama araçları

Araştırmada veriler Tablo 1'de verilen ve açık uçlu altı problemi içeren yapılandırılmış görüşme formları yardımıyla toplanmıştır. Öğrencilerin altı farklı sembol hissi davranışını sergileyebileceği bu problemlerin seçiminde alan yazından yararlanılmıştır (Jupri & Sispiyati, 2020; 2021). Hazırlanan bu veri toplama aracındaki problemlerin ölçülmek istenen amacı temsil edip etmediği yani problemlerin hazırlanma aşamasında sembol hissi davranışlarını sergileyip sergileyemeyeceği uzman görüşüne göre saptanır (Karasar, 1999). Bu amaç doğrultusunda hazırlanan problemler bir matematik eğitimcisine gösterilerek önerileri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Ayrıca hazırlanan bu problemler MEB'in ortaöğretim matematik öğretim programlarında yer alan kazanımlarla örtüşmektedir. Öğretim programlarının ve literatürdeki çalışmaların dikkate alınmasındaki amaç ise soruların geçerliğini yükseltmektir. On ikinci sınıf öğrencilerinin sembol hissi davranışlarını belirlemek amacıyla, öğrenciler ile yapılandırılmış görüşme formları üzerinden klinik mülakatlar yürütülmüştür. Klinik mülakat, öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla yapılan görüşmelerdir. Bu görüşme çeşidinin esas amacı, bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Zazkis & Hazzan, 1999). Klinik mülakatlar ile öğrencilerden; yapılandırılmış görüşme formundaki görevi yerine getirmeleri, her bir görev için cevaplarının ne olduğunu ve bu cevaba nasıl ulaştıklarını açıklamaları (sesli düşünme protokolü), ihtiyaç duyulan ek soruları cevaplamaları ("Bunu nasıl yaptın?", "Niçin?" ve "Neden?" gibi sorularının yanında problemin içeriği ile ilgili ek sorular) beklenmiştir.

2.4. Verilerin analizi

Bu araştırmada, toplanan veriler, nitel araştırma yöntemlerinde yer alan analiz tekniklerinden betimsel analiz tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Betimsel analiz; nitel çözümlemelerdeki verilerin özgün biçimlerine sadık kalınarak, kişilerin söylediklerinden, yazdıklarından ve dokümanların içeriklerinden doğrudan alıntılar yaparak, betimsel bir yaklaşımla verilerin sunumudur (Neuman oğlu, 2005). Bu çalışmada ilk önce araştırmanın kavramsal çerçevesi dâhilinde veri analizi için bir çerçeve oluşturulmuştur. Daha sonra bir önceki aşamada oluşturulan genel çerçeveye göre elde edilen veriler okunarak düzenlenmiş ve düzenlenen verilerin tanımlanmıştır. Gerekli görülen yerlerde doğrudan diyaloglara yer verilmiştir. En son aşamada ise bulguların açıklanması ve ilişkilendirilmesi yapılmıştır. Verilerin sunumunda katılımcı öğrencileri ve araştırmacıyı nitelemek için kod isimler ($Ö_z$, $Ö_o$ ve $Ö_i$) kullanılmıştır. Elde edilen veriler, alan yazında daha önce yapılan araştırmalardaki sembol hissi davranışları göstergeleri (Arcavi, 1994, 2005; Darojaturrofiah, 2017; Jupri & Sispiyati, 2020; Rini, Hussen, Hidayati & Muttaqien, 2021; Tat, 2021) dikkate alınarak oluşturulan Tablo 1' deki çerçeveye göre sınıflandırılmış ve analiz edilmiştir.

Tablo 1. Sembol hissi davranışları, göstergeleri ve problemleri

Sembol hissi davranışı ve göstergeleri	Sembol hissi davranışı problemi
Sembollerle dostluk: Sembollerin nasıl ve ne zaman kullanacağını bilme; Sembolleri ne zaman terk edeceğini bilme; Problemdeki sembollerin anlamlarını belirleyebilme; Problemdeki anlamlarına göre semboller yazma; Problem çözmenin her adımında sembolleri doğru şekilde kullanma	Problem 1: Toplamları 7 ve çarpımları 7 olan iki pozitif tamsayı bulunuz.
Sembolik ifadeleri okuma ve işlem yapma: Problemde oluşturulan matematiksel modellerdeki sembolleri ifade etme; Problemleri çözmek için matematiksel modeller kullanma*;* Problemde oluşturulan matematiksel modelin anlamını açıklama	Problem 2: $\frac{5x+4}{10x+8} = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
Sembolik ifadeleri tasarlama: Sembollerle problemleri ilişkilendirme; Problemin çözümü için gerekli olan sözel ve grafiksel bilgileri başarılı bir şekilde tasarlayabilme	Problem3: Boyu, eninden 8 birim uzun olan ve çevresi 36 birim olan dikdörtgenin alanını bulunuz.
Sembol seçimi: Problemi çözmek için doğru sembolü seçme, Problemde seçilen sembolün uygun temsil yöntemini seçme; Problemi çözmek için seçilen yöntemi kullanma	Problem 4: Toplamları 978 olan ardışık üç doğal sayıyı bulunuz.
Sembollerin/ifadelerin anlamlarının kontrol edilmesi: Problem çözme prosedürünün uygulanması sırasında kullanılan sembollerin uygunluğunu kanıtlama	Problem 5: $38-(1-2x)^2=13$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
Sembol bağlamı: Kullanılan sembollerin farklı problemlerde farklı anlamları olacağını açıklama	Problem 6: $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$ denklem sisteminin kümesini bulunuz.

Çalışmanın geçerliği dış geçerlik ve iç geçerlik olarak iki şekilde ele alınmıştır. Çalışmada dış geçerliği sağlamak için çalışmanın süreci detaylı bir şekilde açıklanmış ve yöntem bölümünde detaylı biçimde sunulmuştur. Ayrıca teorik çatı açıkça sunularak tartışma için olanak sağlanmıştır. Çalışmanın iç geçerliğini sağlamak amacıyla veri analizi için bir çerçeve oluşturulmuş ve bu doğrultuda veriler analiz edilmiştir. Bununla birlikte çalışmada geçen kavramların tamamı detaylı biçimde açıklanmıştır. Çalışmanın geçerliğini sağlamak için belirlenen araştırma problemine uygun araştırma modeli seçilmiş ve araştırmanın bulguları da bu doğrultuda sunulmuştur. Katılımcılardan doğrudan aktarmalar yapılmıştır. Kodlama süreci belirlenen kuramsal çerçeve doğrultusunda yapılmış, kodlamalar farklı araştırmacılar tarafından kontrol edilmiş ve araştırmacılar arasındaki uyum .89 olarak belirlenmiştir. Araştırmacılar arasındaki uyumun bu kadar yüksek olması çalışmanın veri analizinin betimsel analiz yoluyla yapılmasından ve kuramsal çerçevenin detaylı bir şekilde açıklanmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

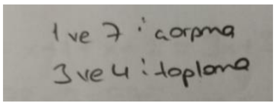
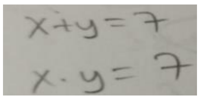
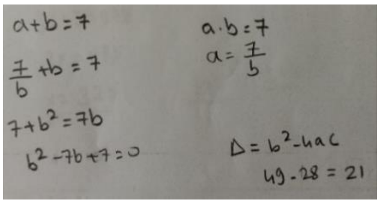
3. Bulgular ve Tartışma

Altı farklı sembol hissi davranışları dikkate alınarak araştırmanın bulguları sunulmuştur.

3.1. Sembollerle dostluk davranışına ilişkin bulgular

Öğrencilerin *sembollerle dostluk davranışlarını* belirlemek için Problem 1 kullanılmış ve başarı düzeyi farklı üç öğrenciye ait çözümler ile karşılıklı diyaloglar Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Problem 1'e ilişkin çözümler ve diyaloglar

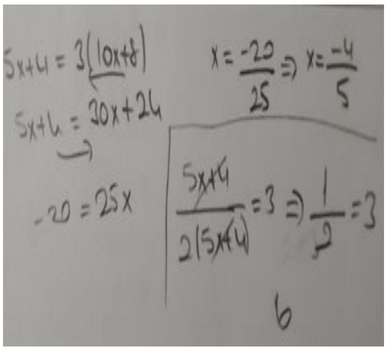
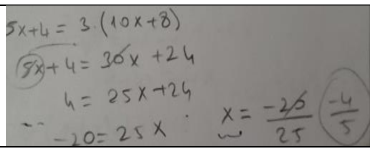
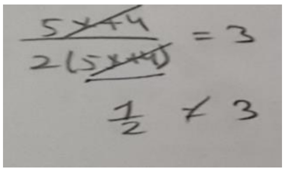
Ö$_z$: Çarpımlarda 7 asal sayı olduğu için 1 ve sadece kendisidir diye biliyorum. Toplamda da 3 ve 4 olabilir. Ya da 1 ve 6. A: Bu soru için eklemek istediğin bir şey var mı? Ö$_Z$: Yani. Ben biraz kestirme yolları seviyorum da.	
Ö$_O$: Kesirli sayı olma ihtimali yüksek geldi. A: Peki nasıl bir işlem yapardın? Ö$_O$: $x + y = 7$ ve $x.y = 7$ olabilir. Sonuç kesirli çıkabilir. Ama başka birşey gelmiyor aklıma. Bu şekilde bırakıyorum. Devam etmeyeceğim.	
Ö$_İ$: İki pozitif sayı dediği için ben bunlara bilinmeyen verirdim. Birine "a" derdim birine "b" derdim. Toplamları 7 olduğu için $\mathrm{a} + \mathrm{b} = 7$ aynı zamanda çarpımları da 7'ymiş. $\mathrm{a}.\mathrm{b} = 7$. Burda bir tanesini yalnız bırakıp diğerini yerine yazardım. A: Daha sonra ne yapacaksın? Ö$_İ$: İşlemleri yaptıktan sonra kök bulmaya giderdim. Ama bunun gerçek kökü yok herhalde. Diskriminant kullanırdım. Bir tane kök bulmak için formül vardı. Hatırlayamadım ama o formülden iki tane kök gelirdi.	

Tablo 2 incelendiğinde Ö$_Z$ öğrencisi problemin çözümünde herhangi bir sembol kullanmamış, problemi aritmetiksel düşünerek cevaplamaya çalışmış, ancak yanlış bir cevap vermiştir. Örneğin Ö$_Z$ öğrencisi, çarpımları ve toplamları 7 olan iki pozitif sayıyı farklı sayı grupları olarak düşünmüştür. Elde edilen bu verilerden zayıf düzeydeki Ö$_Z$ öğrencisi problemin çözümünde hem aritmetik muhakeme hem de aritmetik temsillerden (sembol kullanmadığı) yararlanarak probleme çözüm üretmeye çalıştığından sembollerle dostluk davranışını göstermemiş yani bu davranış bağlamında sembol hissi gelişmemiştir. Ayrıca Ö$_Z$ öğrencisi problemlerden çıkardığı bilgiyi matematiksel olarak doğru bir şekilde sunamadığı aynı zamanda matematiksel bulguları uygulama ve yorumlamada cebirsel olarak derinlemesine düşünemediği görülmüştür. Elde edilen bu sonuçlar Darojaturrofiah'ın (2017) çalışmasıyla benzerlik göstermektedir. Ö$_O$ öğrencisi ise problemi çözerken x ve y gibi iki farklı sembol kullanmış ancak x ve y sembollerine karşılık gelecek sayıları bulamamıştır. Ö$_O$ öğrencisi problemdeki bilinmeyen nicelikler için cebirsel temsillerden (x ve y harfli semboller) yararlandığından, bu öğrenci problemi çözmek için sembollerin nasıl kullanılacağının farkındadır. Ancak Ö$_O$ öğrencisi ilişkileri semboller ile gösterme konusunda yeterince tecrübeye sahip olmasına rağmen bu öğrencinin sembol hissinin tam olarak gelişmediği anlaşılmaktadır. Çünkü sembol hissi eksikliğinin diğer bir göstergesi de, öğrencilerin başlangıçta cebirsel sembolleri kullanmak istemelerine rağmen ne aradıklarının farkında olmamalarıdır. Ö$_İ$ öğrencisi ise bilinmeyen iki pozitif tam sayıyı temsil etmek amacıyla a ve b harfli sembollerini kullanmış, $\begin{cases} a + b = 7 \\ a \cdot b = 7 \end{cases}$ olacak şekilde bir denklem sistemi oluşturmuştur. Ancak öğrenci birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemini yerine koyma stratejisi yardımıyla ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleme indirgemiş ancak ikinci dereceden denklemleri çözümü için gerekli olan formülleri hatırlayamadığından çözüme ulaşamamıştır. Ancak öğrenci bu denklemin çözümünden iki kök geleceğini ifade etmiştir. Bu anlamda Ö$_İ$ öğrencisi problemin çözümünde hem cebirsel muhakemeden hem de cebirsel temsillerden yararlanmıştır. Öğrenci çözüm sürecinde sembollerin nasıl ve ne zaman kullanılacağına karar verme becerisi yani sembollerle dostluk davranışı göstergelerinden birini sergilemiştir. Bu öğrenci sembolleri bir kenara atmak yerine a ifadesini $\frac{7}{b}$'ye eşitleyerek denklemi tek bir bilinmeyene indirgemiş böylelikle denklem sistemi içinde boğulmamıştır. Bu da sembollerle dostluk davranışı göstergelerinden olan "daha iyi bir uygulama için bir sembolden ne zaman vazgeçileceğini bilmeyi gerektirir" göstergesini karşılamaktadır. Nitekim Arcavi (1994; 2005) sembol hissine sahip bir öğrencinin problemi çözme sürecinde sembole ne zaman ihtiyaç duyacağını sezmesi, tam tersi olarak da, daha iyi bir manipülasyon için bir sembolden ne zaman vaz geçeceğini bilmesi gerektiğine vurgu yapmıştır. Ayrıca Arcavi (1994; 2005)'ye göre hem cebirsel manipülasyonların nasıl yapılacağını bilen hem de problemin bağlamı ile seçtiği semboller arasındaki bağlantıyı kurabilen öğrencilerin sembol hissi gelişmiş öğrencilerdir. Bu anlamda diğer iki öğrenciye kıyasla Ö$_İ$ öğrencisi sembollerle dostluk davranışını bu problem için beklenen düzeyde sergilemiştir.

3.2. Sembolik ifadeleri kullanma ve okuma davranışına ilişkin bulgular

Öğrencilerin sembolik ifadeleri kullanma ve okuma davranışlarını belirlemek için Problem 2 kullanılmış ve üç farklı öğrenciye ait çözümler ile diyaloglar Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3. Problem 2'ye ilişkin çözümler ve diyaloglar

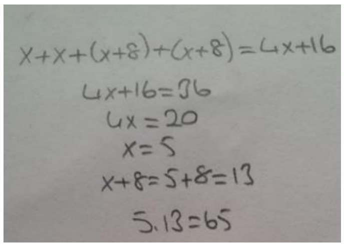
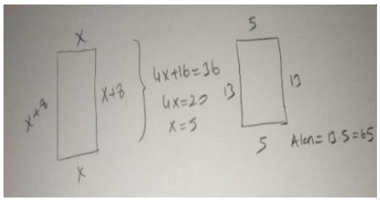
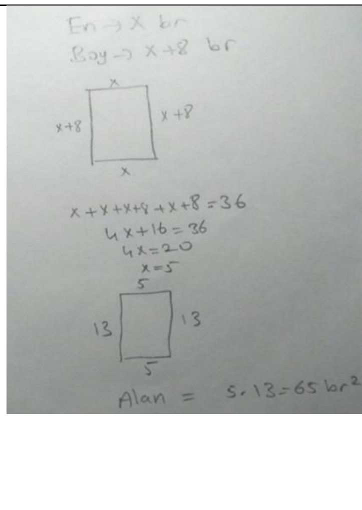
$Ö_Z$: Bunda sadeleştirme yapabiliriz aslında. Ama direkt kısa yoldan mı yapsam? A: Kısa yol dediğin ne? $Ö_Z$: İçler-dışlar çarpımı. A: Kısa yol olarak mı geliyor sana? $Ö_Z$: Yani. [Öğrenci soruyu çözüp $-4/5$ cevabını bulduktan sonra araştırmacı ve öğrenci arasında şöyle bir diyalog geçiyor.] $Ö_Z$: Sanırım yanlış buldum. A: Neden yanlış bulduğunu hissettin? $Ö_Z$: Bilmiyorum çok tuhaf geldi. A: Tuhaf gelme sebebi ne? $Ö_Z$: Kesirli geldiği için. Kesirli olunca yanlış gelmiş gibi oluyor. A: Bu soruyla ilgili var mı başka bir yorumun? $Ö_Z$: Yani aslında sadeleştirebilirdik. Çünkü, parantez içine alabilirdik. $10x + 8$'i, 2 parantezine alabilirdik. Bir de öyle denesem. A: O zaman nasıl bir şey olurdu? $Ö_Z$: Sanırım işlem hatası yaptım. Bulduğu sonuca bakarak buna tekrar geri dönme şansım var mı? A: Tabi ki. Neye takıldın peki? Sonuçlar farklı çıktığı için mi? $Ö_Z$: Evet.	
$Ö_O$: Burada ben direkt içler-dışlar çarpımı yapardım. A: Burada başka bir çözüm düşünseydin nasıl yapardın? Öğrenci soruyu inceliyor… $Ö_O$: Direkt içler-dışlar çarpımı yapardım.	
$Ö_İ$: Şöyle bir baktığımda paydanın payın iki katı olduğunu görüyorum. O zaman paydayı 2 parantezine alırdım. A: Bunu ilk bakışta görebildin soruda? $Ö_İ$: Evet. A: Süper. $Ö_İ$: Şimdi ne yapardım? Aslında $5x + 4$'ler birbirini götürüyor. Bunları götürürdüm. Ama $½ = 3$ geliyor. Derdim ki çözüm kümesi boş küme. Boş küme yani yok. Çözüm kümesi yok. Yani soru yanlış. A: İçler-dışlar çarpımı geldi mi aklına soruya ilk baktığında? $Ö_İ$: Yok gelmedi.	

Tablo 3 incelendiğinde $Ö_Z$ ve $Ö_O$ öğrencilerinin denklemi çözmek için direkt olarak içler-dışlar çarpımı yaptığı belirlenmiştir. Bu muhtemelen birçok öğrencinin yapacağı olası çözümdür. Yani her ki öğrenci de denklemi okuyamamış ve doğrudan denklem üzerine manipülasyonlar yaparak $x = \frac{-4}{5}$ çözümüne ulaşmışlardır. Ancak her iki öğrenci de elde ettikleri $\frac{-4}{5}$ değerini kontrol etmemişlerdir. Bir başka ifade ile $Ö_Z$ ve $Ö_O$ öğrencileri problem 2'deki gibi basit cebirsel denklemleri standart bir şekilde yani sınıflarda öğretildiği gibi içgüdüsel olarak otomatik bir şekilde çözmüştür. Bununla birlikte $Ö_Z$ öğrencisi yanlış yaptığın hissetmiş, paydayı 2 parantezine alarak işlem yapmaya çalışmış, $\frac{1}{2} = 3$ sonucunu elde etmiş ve daha ileri giderek sonucun 6 olduğunu belirtmiştir. Ancak $Ö_Z$ öğrencisi elde ettiği bu sonucu yorumlayamamıştır. Yani $Ö_Z$ öğrencisi elde ettiği sonuçlar karşısında çelişki de kalmış ve çözüme tekrar dönmek istenmiştir. Bu anlamda her iki öğrenci de hiç düşünmeden cebirsel işlemler yapmış, ancak sembolik ilişkilerden meydana gelen denklemi okuyamamışladır. Arcavi (1994) cebirsel bir denklemi çözmek veya istenen sonucu elde etmek için standart manipülasyonlardan fazlasına ihtiyaç olduğuna vurgu yapmış, bu ihtiyacın sembolik ilişkileri okuma veya fark etme olduğunu ifade etmiş ve bu durumun ise sembol hissinin gelişimi ile ilgili olduğunu savunmuştur. Bu anlamda hem $Ö_Z$ hem de $Ö_O$ öğrencisi sembolik ifadelerin anlamını okumayı becerememiştir. Yani $Ö_Z$ ve $Ö_O$ öğrencisi "x ne olursa olsun pay, paydanın yarısı olduğu için bu denklemin çözümü yoktur" şeklindeki bir anlayışa sahip değildir. Bu problem için Jupri ve Sispiyati (2020)'nin çalışmasında belirtildiği gibi başarı düzeyi düşük ve orta olan öğrenciler denklemi anlamak için okumamışlardır. $Ö_İ$ öğrencisi ise denklemi okuduğunda paydanın payın iki katı olduğunu görmüş ve denklemin çözümü olmadığını iddia etmiştir. Yani $Ö_İ$ öğrencisi denklem çözmek için manipülasyonlar yapmadan önce denklemi okumuş, denklemin sol tarafının $\frac{1}{2}$ olduğunu ve sağ tarafının ise 3'e eşit olduğunu fark etmiş ve çözüm olmadığını ifade etmiştir. Arcavi (1994)'ye göre öğrencilerin bir problemin çözüm sürecini gerçekleştirmeden önce problemi anlamalarını gerektirdiği ifade etmiş ve manipülasyonların hedefinin ise sembolleri okumak olduğuna vurgu yapmıştır. Nitekim $Ö_İ$ öğrencisi de sembol hissi bağlamında benzer bir davranış sergilemiştir. Bu anlamda Ö$_{\dot{I}}$ öğrencisinin sembol hissi becerisi ile ilişki olan sembolik bir ifadeyi okuma davranışına sahip olduğunu anlaşılmaktadır.

3.3. Sembolik ifadeleri tasarlama davranışına ilişkin bulgular

Öğrencilerin sözel, görsel, grafiksel vb. temsilleri içeren bağlamlardan sembolik ilişkileri başarılı bir şekilde düzenleyebilme veya tasarlayabilme davranışlarını belirlemek için Problem 3 kullanılmış ve üç farklı öğrenciye ait çözümler ile diyaloglar Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. Problem 3'e ilişkin çözümler ve diyaloglar

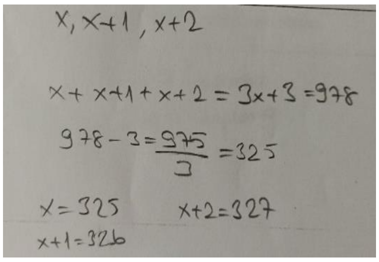
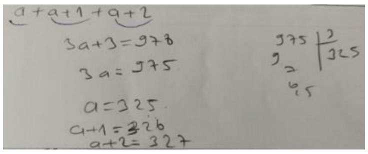
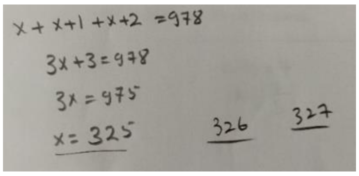
Ö$_Z$: Boyu eninden 8 cm uzun dediği için kısa olan kenara x dedim. O zaman uzun kenar $x+8$ olur. Çevresini bulmak için iki tane kısa kenar iki tane uzun kenar olduğu için de iki tane x'i ve iki tane $x+8$'i toplarım. Bu da $4x+16$ eder ve bu da 36'ya eşit olduğundan x'i 5 buldum. Daha sonra kenar uzunluklarını 5 ve 13 bularak alanı 65 birim kare olarak hesapladım. A: Bu soruyu başka hangi yolla çözerdin? Ö$_Z$: Aslında 36'yı kare olarak da düşünebilirdik. Dikdörtgen değil de kare olarak düşünüp daha sonra o fazlalıkları ayarlayarak da yapabilirdik bence. A: Biraz daha açıklayabilir misin bu düşünceni? Ö$_Z$: Çevresinin 36 birim olduğu söyleniyordu soruda. Yani 36'yı kareymiş gibi dörde böldükten sonra kenarlara bulunan sonuca yazdıktan sonra fazla olan o 8'i ayarlayabilirdik. Ama o zaman bence daha uzun sürerdi. A: Bilinmeyen olarak aklına ilk x mi geldi? Başka bir değişken kullanır mıydın? Ö$_Z$: Aslında direkt x gelmedi ama yıllarca hep x yazdığımız için, o yüzden olabilir.	
Ö$_O$: Boyu eninden 8 cm uzunsa boyuna $x+8$ dersek eni x olur. Bunların toplamı 36'ya eşitmiş. [Öğrenci yandaki işlemi yaptı.] Ö$_O$: Buradan da x, 5 çıktı. Sonra x yerine 5 yazarsak on üçe-beş dikdörtgeni oluştu. Alanı bulmak için de 13 ile 5'I çarpıp sonucu 65 olarak buluruz. A: Bu soruyu başka hangi yolla çözerdin? Ö$_O$: Yine bu şekilde çözerdim. Başka bir yolla çözmezdim. Çünkü bu yol bana daha kesin ve net geliyor. A: Bilinmeyen olarak aklına ilk x mi geldi? Başka bir değişken kullanır mıydın? Ö$_O$: Başka bir değişken kullanmazdım. Yine x kullanarak çözerdim.	
Ö$_{\dot{I}}$: Benim ilk önce direkt aklıma x'i kullanmak geldi. Çünkü matematikte genellikle x bilinmeyen olarak kullanılır. Soruyu okuyunca dikdörtgenin enine x, boyu da eninden 8 birim fazla olduğu için boyuna da $x+8$ derim. Bu şeklin kenarlarına yazarım bunları. Zaten bize çevresini 36 birim olduğunu soruda vermiş. Çevre de bunların toplamıdır…[Öğrenci işlemleri yaparak $x=\ 5$ buldu.] Ö$_{\dot{I}}$: Yani bilinmeyen 5. Boyu da eninden 8 birim fazla olduğu için o zaman boyu da 13 olur. Alanını soruyor. Bir dikdörtgenin alanını bulurken kısa kenarı ile uzun kenarını çarpıyoruz. Bu yüzden 5 çarpı 13'ten cevap 65 birim kare olur. A: Bilinmeyen olarak aklına ilk x mi geldi? Başka bir değişken kullanır mıydın? Ö$_{\dot{I}}$: Genellikle matematikte bilinmeyen olarak x kullanıldığı için ben de x'i kullanmayı tercih ettim. A: Bu soruyu başka hangi yolla çözerdin? Ö$_{\dot{I}}$: Kenarlarına tek bir bilinmeyen değil de birden fazla bilinmeyen kullanabilirdim. Mesela enine x dediysem boyuna y derdim. Yani bu şekilde de yapabilirdim. Ama yine de ilk çözümü yapmayı tercih ederdim.	

Tablo 4'teki bilgilere göre üç öğrenci de sözel veya grafiksel bilgilerden sembolik ilişkiler oluşturma becerisine sahip oldukları anlaşılmaktadır. Öğrencilerin tamamı deneme yanılma stratejisi veya benzer stratejiler kullanmak yerine sözel ifadeden sembolik ifadeler oluşturarak ve bu matematiksel ifadeleri çözerek çözüme ulaşmaya çalışmışlardır. Örneğin $Ö_Z$ öğrencisi kısa kenar uzunluğu için x sembolünü kullanmış ve kısa kenar uzunluğunu dikkate alarak uzun kenarı $x+8$ olarak ifade etmiştir. Daha sonra $x+x+x+8+x+8=4x+16=36$ ifadesinden yararlanarak $x=5$ bulmuş ve dikdörtgenin alanını 65 birim kare olarak bulmuştur. $Ö_O$ ve $Ö_İ$ öğrencileri ise sözel ifadeyi dikdörtgen görseline çevirmiş ve dikdörtgenden yaralanarak sembolik temsile geçiş yapmışlardır. Bu anlamda üç öğrenci de sembol hissinin bu davranışını sergilemiştir. Aynı zamanda problem durumunu sembolik temsile çevirme becerisi veya matematikselleştirme süreci sembol hissi davranışını karakterize etmektedir (Jupri & Drijvers, 2016).

3.4. Sembol seçimi davranışına ilişkin bulgular

Öğrencilerin bir problem için olası bir sembolik temsili seçme davranışını belirlemek için Problem 4 kullanılmış ve üç farklı öğrenciye ait çözümler ile diyaloglar Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Problem 4'e ilişkin çözümler ve diyaloglar

$Ö_Z$: Bence o zaman 300'lü bir sayı olabilir. Ya da 200'lü. A: Neden öyle düşündün? Ya da nasıl çözmeyi düşünüyorsun şu an soruyu? $Ö_Z$: Ben burada önce $x,\ x+1,\ x+2$'yi verirdim. A: Bunu verme sebebin ne? $Ö_Z$: Çünkü aralarında birer sayı oynadığı için. İlk baştaki sayıdan en sondaki sayıya iki artış olacak. Yani ardışık, o mantıkla. A: Peki ardışık sayılarda hep bu şekilde mi bilinmeyenler veriyorsun? $Ö_Z$: Evet. A: Genelde bu tarz sorularda bunu mu kullanıyorsun? $Ö_Z$: Bu yolu kullanıyorum. A: Genelde ne yapıyorsun? $Ö_Z$: Tahmini giderdim genelde. Şıklardan mesela. A: Ama bu soruda olduğu gibi şıklar yoksa. $Ö_Z$: Ardışık olduğu belli zaten. Yüksek ihtimalle hani 9 olduğu için ya 2'dir ya 3'lerdendir. Hani toplamlardan giderdim. Diğer iki sayıyı toplayarak o şekilde bulurdum. A: Hangisi daha pratik peki senin için? $Ö_Z$: Denklemle çözme…	
… $Ö_O$: Şimdi ilk sayıya a dersem. Diğer sayı $a+1$ olur. Üçüncü sayım da yani en büyük sayım da $a+2$ olur. [Öğrenci daha sonra bu sembolik ifadelerden yararlanarak küçük, ortanca ve büyük sayıyı buluyor] A: Sana ardışık sayı denildiğinde hep bu ifadeleri mi kullanıyorsun? $Ö_O$: Evet. İlk aklıma bu geliyor.	
… $Ö_İ$: Ardışık dediği için.1, 2, 3 gibi. Yine bilinmeyenden giderdim. Birine x dersem, diğerine $x+1$, diğerine de $x+2$ derdim. A: Peki ardışık sayıları hep bu şekilde mi tanımlıyorsun? $Ö_İ$: Ya da şey, $x, x-1, x+1$ veya $x, x-1, x-2$ gibi. A: Bunlar da olabilir yani? $Ö_İ$: Evet. Çünkü ardışık sonuçta.	

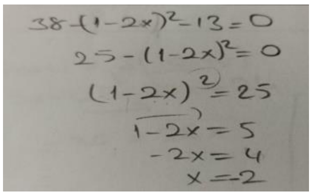
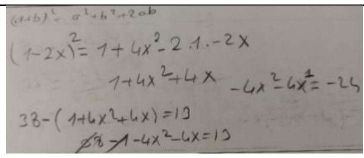
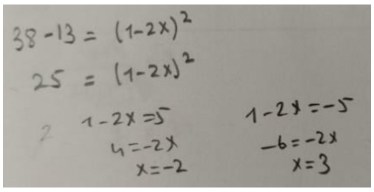
Tablo 5 incelendiğinde üç öğrencinin de verilen bir problem durumunun çözümü için sembol seçme davranışını sergiledikleri söylenebilir. Örneğin $Ö_Z$ öğrencisi problemde ardışık üç sayı için $x, x+1, x+2$ sembollerini seçerek çözüme ulaşmıştır. Ancak $Ö_Z$ öğrencisi bu tür problemlerin özellikle de şıklı olanların çözümünde genel olarak tahminler yürüterek ve deneme yanılma stratejisinden yararlanarak problemlere çözüm ürettiğini ifade etmiştir. $Ö_Z$ öğrencisine ait diyalogda dikkate çeken diğer bir durum ise öğrencisinin bu tarz sorularda devamlı olarak $x,\ x+1,\ x+2$ şeklinde sembol seçimi yapmasıdır. Bu anlamda $Ö_Z$ öğrencisinin sembol seçiminde ezber bir anlayış sergilediği veya bilinçli bir sembol seçimi davranışı sergilemediği söylenebilir. $Ö_O$ öğrencisi de $Ö_Z$ öğrencisine benzer bir davranış sergilemiş ardışık üç sayı için $a,\ a+1,\ a+2$ sembollerini seçerek problemin çözümü için doğru sembol seçimi gerçekleştirmiştir. $Ö_O$ öğrencisi de bu tarz sorularda genel olarak bu sembolleri kullandığını belirtmiştir. $Ö_İ$ öğrencisi ise problemin çözümü için hem $x,\ x+1,\ x+2$ hem $x,\ x-1,\ x-2$ hem de $x,\ x-1,\ x+1$ sembollerinin seçilebileceği ifade etmiştir. Arcavi (1994)'ye göre sembol seçimi sonuç açısından bağlayıcı değildir ve öğrenci isterse veya sembol seçimini yetersiz görürse problemim çözümü için farklı şekillerde sembol seçimleri yapabilir. Özellikle sembol hissi gelişmiş olan öğrenciler hesaplamalarını basitleştirmek için daha uygun sembol seçimleri gerçekleştirebilirler.

Bu anlamda Öİ öğrencisinin verilen bir problem için olası bir sembolik temsili seçme davranışını sergilediği hatta diğer iki öğrenci ye göre daha esnek ve verimli sembol seçme becerisi sergilediği anlaşılmaktadır. Özellikle bu tarz problemlerin çözümü için en kullanışlı sembol seçimi $x-1,\ x,\ x+1$ şeklinde olup bu durum matematikselleştirme süreci ile yakından ilgilidir (Jupri & Drijvers, 2016).

3.5. Sembollerin/İfadelerin anlamlarının kontrol edilmesi davranışına ilişkin bulgular

Problem çözme sürecinde sembollerin veya matematiksel ifadelerin anlamlarını kontrol etme ihtiyacının gerçekleştirilme özelliğine göre tasarlanan bu probleme ilişkin üç farklı öğrenciye ait çözümler ile diyaloglar Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6. Problem 5 ilişkin çözümler ve diyaloglar

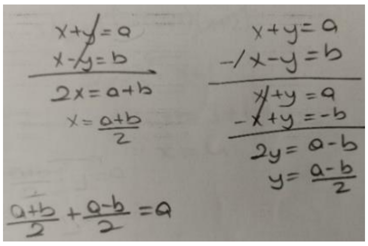
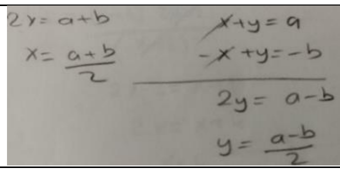
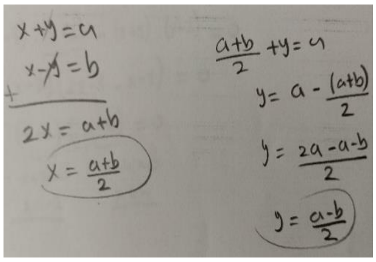
<table>
<tr><td>Ö$_Z$: Şu anda 13'ü bu tarafa yani 38'den tarafa atarsak o zaman denklem sıfıra eşit olur. Şimdi $(1-2x)^2$ ifadesi 25'eşit olur. Buradan $1-2x=5$ yazılır. O halde $x=-2$ şeklinde tek bir kök bulunur.
A: Emin misin?
Ö$_Z$: Evet [Öğrenci işlemin sağlamasını yapıyor.]
A: Bu soru için çözümün bu kadar mı? Devam edecek misin?
Ö$_Z$: Bu kadar.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A: Bu problemi nasıl çözersin
Ö$_O$: Ben ilk önce eksiyi dağıtırdım. Yok, yok, karesini alırdım ilk. .
A: Devamında ne yapacaksın.
Ö$_O$: Kafam karıştı, benden bu kadar… [Öğrenci yandaki çözümü yaptıktan sonra öğrencinin kafası karıştı ve x'i bulamadan işlem yapmayı bıraktı.]</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A: Bu problemi nasıl çözersin?
Öİ: İlk önce 13'ü karşı tarafa kareli ifadeyi de diğer tarafa atarım.
A: Evet, devam edelim.
Öİ: Şimdi burada kare olduğu için mutlak değer olarak düşüneceğiz bunu. Yani neyin karesi 25 eder diye düşünürsek -5 de olabilir +5 de olabilir. Hatta mutlak değer şeklinde de yazabiliriz… [Öğrenci daha sonra şekilde görülen işlemleri yaparak kökleri -2 ve 3 olarak bulmuştur.]</td><td>
</td></tr>
</table>

Jupri ve Sispiyati (2020)'ye göre problem çözme sürecinde sembollerin veya matematiksel ifadelerin anlamlarını kontrol etme ihtiyacının gerçekleştirilme sembol hissi davranışlarından biridir. Bu bağlamda Tablo 6 incelendiğinde Ö$_O$ öğrencisinin $(1-2x)^2$ ifadesini doğrudan $1+4x^2-4x$ şeklinde yazarak denklemi çözmeye çalıştığı ancak işlemsel süreçleri birbirine karıştırdığı bu nedenle kafa karışıklığı yaşadığı belirlenmiştir. Ö$_Z$ ve Öİ öğrencileri ise denklemi kontrol etmiş ve aritmetik bir bakış açısıyla denklemi çözmeye çalışmıştır. Fakat Ö$_Z$ öğrencisinin oluşturduğu denklem 38 – ? – 13 = 0 şeklinde iken Öİ öğrencisinin oluşturduğu yapı 38 – ? = 13 şeklindedir. Bu iki öğrencinin bakış açısı $(1-2x)^2=25$ denklemine götürmektedir. Ancak ikinci dereceden bu denklemin çözümünde Ö$_Z$ öğrencisi tek bir kök elde etmişken, Öİ öğrencisi ise $1-2x=5$ ve $1-2x=-5$ denklemlerinden $x=-2$ ve $x=3$ köklerini doğru bir şekilde bulmuştur. Bu anlamda hem Ö$_Z$ hem de Öİ öğrencileri problem çözme prosedürünün uygulanması sırasında kullanılan sembollerin uygunluğunu kanıtlama davranışını sergilemişlerdir. Bir cebirsel ifadenin anlamı fark etme becerisi diğer sembol hissi davranışlarından biri olan problem çözmede sembolik ifadeleri manipüle etme ve okuma becerisi ile de ilişkilidir (Arcavi, 1994). Jupri ve Sispiyati (2020)'nin de belirttiği gibi öğrencilerin denklemler üzerindeki kavramsal ve ilişkisel anlayışını değerlendirmek için bu tür problemleri kullanmak önemlidir. Bağdat ve Anapa Saban'ın (2014) çalışmasının sonucunda, başarı düzeyi düşük olan öğrencilerin en çok zorlandıkları becerinin sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma becerisi olduğu, başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin diğer öğrencilere göre daha yüksek olduğu görülmüştür. Bu çalışmada da benzer sonuçlara ulaşılmıştır. Bu çalışmada başarı düzeyi yüksek olan öğrenci cebirsel denklem, sorularını çözerken zorluk yaşamazken başarı düzeyi düşük olan öğrenci zorluk yaşamıştır. Bu sonuç Netriwati (2016) çalışmasının bir sonucu olan cebirsel ön bilgileri yüksek olan öğrencilerin problemleri doğru ve akıcı bir şekilde anlayıp çözebildikleri, cebirsel ön bilgileri düşük olan öğrencilerin ise problem çözme aşamalarında zorlandıkları sonucuyla benzerlik göstermektedir.

3.6. Sembol bağlamı davranışına ilişkin bulgular

Sembollerin farklı anlamları (bilinmeyen, değişken, parametre, vb.) olabileceğinin farkına varma özelliğine göre tasarlanan bu problem, öğrencilerin sembol bağlamı davranışını belirlemek için kullanılmış ve üç farklı öğrenciye ait çözümler ile diyaloglar Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7. Problem 6 ilişkin çözümler ve diyaloglar

<table>
<tr><td>$Ö_Z$: Yok etme metodu ile yapabiliriz aslında. [Öğrenci yandaki işlemleri yaptı.]
A: Buradaki x, y, a, b harfleri sana ne ifade ediyor? Bunlar sence bilinmeyen midir? Harf midir? Sayı mıdır?
$Ö_Z$: Sanki katsayı da olabilir.
A: Hangileri mesela? x için ne dersin? y için ne dersin? Tek tek her harf için söyler misin?
$Ö_Z$: x bence burada bir sayının yerini tutuyor. y de sayı olabilir. Çünkü sayı ve sayı toplamı. Ya da bir katın toplamı. a ve b sayıların yerini tutuyor.
A: O halde hepsi sayı sana göre…
$Ö_Z$: Evet. Bilinmeyen olması için herhangi bir sayıyı vermesi gerekmez miydi?
A: Senin yorumun önemli burada.
$Ö_Z$: Mesela. $x + y$’nin toplamı herhangi bir sayı 5 ya da 7, ne bileyim? x’i verip $y = a$ tarzında bir şey olabilirdi yani. Hepsi sayı bilinmeyen yok.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A: Bana x, y, a, b arasındaki ilişkiyi söyler misin? Bunlar sence bilinmeyen midir? Harf midir? Sayı mıdır?
$Ö_O$: x bilinmeyen… y de bilinmeyen... a ve b de bilinmeyen. Hepsi bilinmeyen benim için. [Öğrenci bu diyalogdan sonra yandaki gibi bir işlem yapıyor…]</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A: Burada x, y, a, b hakkında ne düşünüyorsun? Sence bunlar bilinmeyen mi, harf mi, sayı mı?
$Ö_İ$: Bence x ve y bilinmeyen de a ve b bir sayı gibi. Genellikle hep öyle oluyor ya.
A: Genellikle hep olduğu için mi öyle yoksa bu soru için özel bir yorumun var mı?
$Ö_İ$: Yani genellikle biz hep bilinmeyen olarak x ve y yi kullandığımız için.
A: Ben mesela denklemin sağ tarafına x ve y deseydim sol tarafına a ve b deseydim o zaman hangisi bilinmeyen olurdu sence?
$Ö_İ$: O zaman a ve b bilinmeyen olarak görürdüm.
A: Neden peki onlar bilinmeyen sence?
$Ö_İ$: Yani sonuç genellikle bir sayıya eşit oluyor. Bilinmeyen hani denklem çözüyoruz ya. Bilinmeyen genellikle denklemin sonucunda değil de içinde oluyor. Sonuç genellikle bir sayıya eşit oluyor. [Öğrenci bu diyalogdan sonra yandaki gibi bir işlem yapıyor…]</td><td>
</td></tr>
</table>

Bu probleme öğrencilerin çözüm bulması için değişkenler ve parametreler arasında ayrım yapabilmeleri beklenmektedir (Arcavi, 1994; Jupri & Sispiyati, 2020). Yani öğrenciler x ve y' yi değişken, a ve b'yi parametre olarak düşünmelidir. Tablo 7 incelendiğinde öğrencilerinin tamamının yok etme yöntemini kullanarak denklem sistemini doğru bir şekilde çözdükleri anlaşılmaktadır. Ancak zayıf düzeydeki $Ö_Z$ öğrencisi x, y, a ve b harfli sembollerinin tamamının sayılar için yer tutucular olduğunu ifade etmiştir. $Ö_O$ öğrencisi ise x, y, a ve b harfli sembollerinin tamamının bilinmeyenler olduğunu söylemiştir. Bu anlamda hem $Ö_Z$ hem de $Ö_O$ öğrencisi bağlamda kullanılan sembollerin farklı anlamlara sahip olduklarının farkında değildir. $Ö_İ$ öğrencisi ise x ve y’nin bilinmeyenler a ve b’nin ise sayılar olduğunu ifade etmiştir. Hatta $Ö_İ$ öğrencisi problem durumuna göre a ve b’nin bilinmeyenler olabileceğini belirtmiştir. Aslında $Ö_İ$ öğrencisinin a ve b ile ilgili ifadeleri parametre kavramına işaret etse de diyalog esnasında ne değişken ne de parametre kavramlarına vurgu yoktur. Bu anlamda tüm öğrencilerin “sembol bağlamı” davranışını sergilemediği söylenebilir. Ancak $Ö_İ$ öğrencisinin farklı bir problem de bu sembollerin farklı roller alabileceğini ifade etmesi az da olsa öğrencinin sembol bağlamı davranışını sergilediğini göstermiştir. Arcavi (1994) sembol hissi ile ilgili bu davranışın (sembollerin farklı anlamları (bilinmeyen, değişken, parametre, vb.) olabileceğinin farkına öngörme) özellikle sembolleri içeren işlemlerle ilgili farkındalıkta önemli roller oynayacağını belirtmiştir. Sfard(1992) ve Moschkovich, Schoenfield ve Arcavi (1993) ise bu farkındalığın, içeriğe bağlı olarak sembollerin anlam farklılıklarını bir düzene sokma ve farklı matematiksel nesne ve işlemlerle başa çıkma anlayışını gerektirdiğine vurgu yapmışlardır. Bu anlamda üç öğrencinin de harfli sembollerin farklı anlamları ile ilgili anlayışlarının yetersiz olduğu tespit edilmiştir.

4. Sonuç ve Öneriler

Birinci problemin çözümünde herhangi bir sembol kullanmayan $Ö_Z$ öğrencisi problemin çözümünde hem aritmetik muhakemeden hem de aritmetik temsillerden yararlanarak probleme çözüm üretmeye çalıştığından sembollerle dostluk davranışını göstermemiş yani bu davranış bağlamında sembol hissi gelişmemiştir. $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencisi ise problemi çözerken x ve y gibi iki farklı sembol kullanmış ancak x ve y sembollerine karşılık gelecek sayıları bulamamıştır. Bu nedenle $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencisi problemi çözmek için sembollerin nasıl kullanılacağının farkındadır. Ancak $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencisi ilişkileri semboller ile gösterme konusunda yeterince tecrübeye sahip olmasına rağmen bu öğrencinin sembol hissinin tam olarak gelişmediği anlaşılmaktadır. $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisi ise bilinmeyen iki pozitif tam sayıyı temsil etmek amacıyla a ve b harfli sembollerini kullanarak denklem sistemi oluşturmuştur. Ancak öğrenci birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemini yerine koyma stratejisi yardımıyla ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleme indirgemiş ancak ikinci dereceden denklemleri çözümü için gerekli olan formülleri hatırlayamadığından çözüme ulaşamamıştır. Ancak öğrenci bu denklemin çözümünden iki kök geleceğini ifade etmiştir. Bu anlamda $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisi problemin çözümünde hem cebirsel muhakemeden hem de cebirsel temsillerden yararlanmıştır. Öğrenci çözüm sürecinde sembollerin nasıl ve ne zaman kullanılacağına karar verme becerisi yani sembollerle dostluk davranışı göstergelerinden birini sergilemiştir. Bu öğrenci sembolleri bir kenara atmak yerine a ifadesini $\frac{7}{b}$'ye eşitleyerek denklemi tek bir bilinmeyene indirgemiş böylelikle denklem sistemi içinde boğulmamıştır. Bu da sembollerle dostluk davranışı göstergelerinden olan "daha iyi bir uygulama için bir sembolden ne zaman vazgeçileceğini bilmeyi gerektirir" göstergesini karşılamaktadır. Bu anlamda diğer iki öğrenciye kıyasla $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisi sembollerle dostluk davranışını bu problem için beklenen düzeyde sergilemiştir.

İkinci problemin çözümünde, muhtemelen birçok öğrencinin yapacağı olası çözümler gibi $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ ve $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencileri de denklemi çözmek için direkt olarak içler-dışlar çarpım yapmış ve doğrudan denklem üzerine manipülasyonlar yaparak $x = \frac{-4}{5}$ çözümüne ulaşmışlardır. Bununla birlikte $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ öğrencisi yanlış yaptığın hissetmiş, paydayı 2 parantezine alarak işlem yapmaya çalışmış, $\frac{1}{2} = 3$ sonucunu elde etmiş ve daha ileri giderek sonucun 6 olduğunu belirtmiştir. Bu anlamda her iki öğrenci de hiç düşünmeden cebirsel işlemler yapmış, ancak sembolik ilişkilerden meydana gelen denklemi okuyamamışladır. $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisi ise denklemi okuduğunda paydanın payın iki katı olduğunu görmüş ve denklemin çözümü olmadığını iddia etmiştir. Yani $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisi denklem çözmek için manipülasyonlar yapmadan önce denklemi okumuş, denklemin sol tarafının $\frac{1}{2}$ olduğunu ve sağ tarafının ise 3'e eşit olduğunu fark etmiş ve çözüm olmadığını ifade etmiştir. Bu anlamda $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisinin sembol hissi becerisi ile ilişki olan sembolik bir ifadeyi okuma davranışına sahip olduğu, $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ ve $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencilerinin ise sahip olmadıkları anlaşılmaktadır.

Üçüncü problemin çözümünde öğrencilerin tamamı deneme yanılma stratejisi veya benzer stratejiler kullanmak yerine sözel ifadeden sembolik ifadeler oluşturarak ve bu matematiksel ifadeleri çözerek çözüme ulaşmaya çalışmışlardır. $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ ve $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencileri ise sözel ifadeyi dikdörtgen görseline çevirmiş ve dikdörtgenden yaralanarak sembolik temsile geçiş yapmışlardır. Bu anlamda öğrencilerin tamamı sözel, görsel, grafiksel vb. temsilleri içeren bağlamlardan sembolik ilişkileri başarılı bir şekilde düzenleyebilme veya tasarlayabilme davranışını sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Dördüncü probleme benzer tarzdaki problemlerin özellikle de şıklı olanların çözümünde genel olarak tahminler yürüterek ve deneme yanılma stratejisinden yararlanarak problemlere çözüm ürettiğini ifade eden $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ öğrencisi, bu tarz problemlerin çözümünde devamlı olarak ardışık üç sayı için $x, x+1, x+2$ sembollerini tercih ettiğini belirtmiştir. $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencisi de $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ öğrencisine benzer bir davranış sergilemiştir. Bu anlamda $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ ve $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencileri sembol seçiminde ezber bir anlayış sergilediği veya bilinçli bir sembol seçimi davranışı sergilemediği söylenebilir. Problemin çözümü için farklı şekillerde sembol seçimleri ($x,\ x+1,\ x+2$; $x,\ x-1,\ x-2$; $x,\ x-1,\ x+1$) olabileceğini belirten $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisinin diğer iki öğrenci ye göre daha esnek ve verimli sembol seçme becerisi sergilediği anlaşılmaktadır.

Beşinci problemin çözümünde $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencisinin işlemsel süreçleri birbirine karıştırdığı bu nedenle kafa karışıklığı yaşadığı belirlenmiştir. $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ ve $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencileri ise denklemi kontrol etmiş ve aritmetik bir bakış açısıyla denklemi çözmeye çalışmıştır. Fakat $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ öğrencisinin oluşturduğu yapı 38 – ? – 13 = 0 şeklinde iken $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisinin oluşturduğu yapı 38 – ? = 13 şeklindedir. Bu iki öğrencinin bakış açısı $(1-2x)^2 = 25$ denklemine götürmektedir. Ancak ikinci dereceden bu denklemin çözümünde $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ öğrencisi tek bir kök elde etmişken, $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisi ise her iki kökü doğru bir şekilde bulmuştur. Bu anlamda hem $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ hem de $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencileri problem çözme prosedürünün uygulanması sırasında kullanılan sembollerin uygunluğunu kanıtlama davranışını sergilemişlerdir.

Altıncı problemin çözümünde öğrencilerin tamamı yok etme yöntemini kullanarak denklem sistemini doğru bir şekilde çözdükleri anlaşılmaktadır. Ancak $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ öğrencisi x, y, a ve b harfli sembollerinin tamamının sayılar için yer tutucular olduğunu ifade etmişken, $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencisi ise bu sembollerinin tamamının bilinmeyenler olduğunu söylemiştir. Bu anlamda hem $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{Z}}$ hem de $\ddot{\mathrm{O}}_{\mathrm{O}}$ öğrencisi bağlamda kullanılan sembollerin farklı anlamlara sahip olduklarının farkında değildir. $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisi ise x ve y'nin bilinmeyenler a ve b'nin ise sayılar olduğunu ifade etmiştir. Hatta $\ddot{\mathrm{O}}_{\dot{\mathrm{I}}}$ öğrencisi problem durumuna göre a ve b'nin bilinmeyenler olabileceğini belirtmiştir. Aslında

$\text{Ö}_\text{İ}$ öğrencisinin a ve b ile ilgili ifadeleri parametre kavramına işaret etse de diyalog esnasında ne değişken ne de parametre kavramlarına vurgu yoktur. Bu anlamda üç öğrencinin de harfli sembollerin farklı anlamları ile ilgili anlayışlarının yetersiz olduğu tespit edilmiştir. Ancak $\text{Ö}_\text{İ}$ öğrencisinin farklı bir problem de bu sembollerin farklı roller alabileceğini ifade etmesi az da olsa öğrencinin sembol bağlamı davranışını sergilediğini göstermiştir.

Sonuç olarak bu çalışmada kullanılan problemler bağlamında başarı düzeyi yüksek olan $\text{Ö}_\text{İ}$ öğrencisi başarı düzeyleri zayıf ve orta düzeyde olan Ö_Z ve Ö_O öğrencilerine kıyasla sembol hissi davranışlarını beklenen düzeyde sergilemiştir. Nitekim Kenney (2008) ve Darojaturrofiah (2017) çalışmalarında başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin problemlerin çözümünde harfli sembolleri tercih ettikleri, bu öğrencilerin verilen problemin çözümünü elde etmek için sembol hissi davranışlarının büyük bir bölümünü sergiledikleri tespit edilmiştir. Bu çalışmada sadece 12.sınıf öğrencilerin altı farklı sembol hissi davranışına denklem ve sözel problemler üzerinden odaklanılmıştır. Bu nedenle matematiğin ilgili içeriğine bağlı olarak ortaokul veya lise düzeylerindeki öğrencilerin sembol hissi davranışlarını belirlemek amacıyla farklı problem türlerinden yararlanılmasını önemlidir. Ayrıca bu çalışmada kullanılan denklem ve sözel problemler ile öğrenciler hem biçimlendirici hem de özetleyici değerlendirmeler tabi tutulabilir.

Kaynaklar / References

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 42-47.

Bağdat, O., & Anapa Saban, P. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies, 2*(26), 473-496.

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2010). Symbol sense behaviour in digital activities. *For the Learning of Mathematics*, 30(3), 43-49.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2017). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (23. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Cho, S. G., & Song, S. H. (2010). Symbol sense analysis on 6th grade elemantary school mathematically able students. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 14(3), 937-957.

Creswell, J. (2017). *Nitel araştırmacılar için 30 temel beceri* (1. Baskı) (H. Özcan, Çev.). Ankara: Anı Yayıncılık.

Darojaturrofiah, L. (2017). *Profil symbol sense dalam memecahkan masalah aljabar ditinjau dari kemampuan matematika siswa di smp negeri 1 sidoarjo.* Unpublished Master's thesis, Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya, Surabaya, Indonesia.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment*. *Design research on the understanding of the concept of parameter*. Unpublished Doctoral dissertation, Utrecht University, Freudenthal Institute, the Netherlands.

Driscoll, M. (1999). F*ostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Porstmouth, NH: Heinemann.

Drouhard J. P., & Teppo A. R. (2004). Symbols and language. In K.Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds), *The future of the teaching and learning of algebra the 12th ICMI study* (Vol 8, pp. 225-264). Dordrecht: Springer.

Fey, J. (1990). Quantity. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: new approaches to numeracy* (pp. 61-94). Washington, D.C.: The National Academies Press.

Gierdien, F., & Olivier, A. (2013). *Symbol sense through a spreadsheet algebra view of f (m, x) = mx and f (m, c, x) = mx + c in pre-service mathematics teacher education*. 19th Annual National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa, Bellville, South Africa.

Goldin, G. A. (1987). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-184). UK: Routledge

Jupri, A., & Sispiyati, R. (2020). Students' algebraic proficiency from the perspective of symbol sense. *Indonesian Journal of Science and Technolo*gy, 5(1), 86-94.

Jupri, A., & Sispiyati, R. (2021). *Symbol sense characteristics for designing mathematics tasks*. International Conference on Mathematics and Science Education (ICMScE). Bandung, Indonesia.

Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12 (9), 2481-2502.

Karasar, N. (1999). *Bilimsel Araştırma Yöntemi*. Nobel, Ankara.

Keller, B. A. (1993). *Symbol sense and it's development in two computer algebra system environments*. Unpublished Doctoral dissertation. Western Michigan University, U.S.A.

Kenney, R. H. (2008). *The influence of symbols on pre-calculus students' problem solving goals and activities.* Unpublished Doctoral dissertation. North Carolia State University, U.S.A.

Kop, P. M. G. M., Janssen, F. J. J. M., Drijvers, P. H. M., & Van Driel, J. H. (2020). Promoting insight into algebraic formulas through graphing by hand. *Mathematical Thinking and Learning,* 23(2), 125-144.

Kümbetoğlu, B. (2005*). Sosyolojide ve antropolojide niteliksel yöntem ve araştırma*. İstanbul: Bağlam Yayıncılık.

Lamb, L. L., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., Whitacre, I., & Lewis, M. (2012). Developing symbol sense for the minus sign. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(1), 5-9.

Lins, R. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Unpublished doctoral dissertation. Nottingham University, UK.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 69-100). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Research Council (NRC). (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the futura of mathematics education.* Washington, DC.: National Academy Press

Netriwati, N. (2016). Analisis kemampuan mahasiswa dalam pemecahkan masalah matematis menurut teori Polya. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(2), 181-190.

Neuman, D. (2014). Qualitative research in educational communications and technology: a brief introduction to principles and procedures. *Journal of Computing in Higher Education,* 26 (1),. 69-86.

Papadopoulos, I. (2019). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 210- 227.

Pierce, R., & Stacey, K. C. (2001). Reflections on the changing pedagogical use of computer algebra systems: Assistance for doing and learning mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20(2), 143-161.

Pierce, R., & Stacey, K. (2004). Monitoring progress in algebra in a CAS active context: Symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 11(1), 3-11.

Pope S., & Sharma, R. (2001). Symbol sense: Teacher's and student's understanding. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21(3), 64-69.

Rini, A. D. P., Hussen, S., Hidayati, H., & Muttaqien, A. (2021). *Symbol sense of mathematics students in solving algebra problems*. Journal of Physics Conference, Tasikmalaya, Indonesia.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification–the case of function. in E. Dubinsky and G. Hazel (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, pp. 59–84. Mathematical Association of America.

Speaks, J. (2004). *Russell's reduction of mathematics to logic.* [online]. https://www3.nd.edu/~jspeaks/courses/mcgill/370/ logicism.html adresinden erişilmiştir.

Sugilar, H., Kariadinata, R., & Sobarningsih, N. (2019). Spektrum symbol dan structure sense matematika siswa madrasah tsanawiyah. *Kalamatika: Jurnal Pendidikan Matematika,* 4(1), 37-48.

Tabach, M., Arcavi, A., & Hershkowitz, R. (2008). Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment. *Educational Studies in Mathematics,* 69(1), 53-71.

Tat, T. (2021). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebir problemlerindeki sembol hissi davranışlarının incelenmesi: Bir durum çalışması.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yu-xin, Z. (2002). *Number sense, symbol sense and the others some comments on the new curriculum standards* [online]. http://www.cnki.com.cn adresinden erişilmiştir.

Zaskis, R. & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour,* 17 (4), 429-439.

Zhu, L., Hu, H., & Ma, Y. (2017). *Research on mathematics symbol sense at home and abroad: retrospect and prospect* [online]. http://en.cnki.com.cn adresinden erişilmiştir.