Research Article

An Analysis of the Prospective Teachers' Noticing of Student Mathematical Thinking

Zülbiye Toluk Uçar[a] and Figen Bozkuş[b]

[a]Bolu Abant İzzet Baysal University, Faculty of Education, Bolu, Turkey (ORCID: 0000-0002-9737-6607)
[b]İstanbul Medipol University, Faculty of Education, İstanbul, Turkey (ORCID: 0000-0002-0413-9232)

Article History: Received: 23 August 2023; Accepted: 3 December 2023; Published online: 31 December 2023

Abstract: This study analyzed the prospective teachers' noticing of students' mathematical thinking. In the analysis of their skills of noticing, the main consideration was the details that the teachers attended to, the way that they interpreted students' mathematical understanding and the practices that they would perform to support students' mathematical understanding. The study employed a descriptive research model, which is one of the qualitative research methods. It was carried out with a total of 27 senior prospective middle school mathematics teachers in in a state university in the 2015-2016 academic year. In the data collection process, the prospective teachers were asked to analyze the 7th grade students' solutions. Prospective teachers examined these solutions within the framework of the questions in relation to the subskills of attending to, interpreting, and deciding on the next step, which were identified by Jacobs et al. (2010) regarding the skill of noticing students' mathematical thinking. The data analysis was conducted using the framework developed by Jacobs et al. as well. The study concluded that the prospective teachers were relatively better at the dimension of attending to than the dimension of interpreting and deciding on. Further, it was found that the prospective teachers overlooked the noteworthy mathematical details in the strategies of the students and focused on the operations performed by the students and that their interpretations did not indicate the students' mathematical understanding. Moreover, the study revealed that the prospective teachers tended to come up with practice-based ideas and to use their own instructional knowledge rather than the students' thinking in the dimension of deciding on the next step in their teaching.

Keywords: Teacher noticing, Students' mathematical thinking, Prospective teachers

Öz: Bu araştırmada öğretmen adaylarının, öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerileri incelenmiştir. Adayların farkındalık becerileri bir öğrencinin cevabını incelerken, neye ve hangi detaylara dikkat ettikleri, öğrencilerin matematiksel anlamalarını nasıl yorumladıkları ve öğrencilerin matematiksel anlamalarını desteklemek için neler yapabilecekleri çerçevesinde incelenmiştir. Araştırma, bir devlet üniversitesinde 4. sınıfta öğrenimine devam eden 27 ortaokul matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Veri toplama sürecinde, adaylar 7. sınıf öğrencilerine ait problem çözümlerini, Jacobs ve arkadaşları (2010) tarafından geliştirilen öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etmeye yönelik dikkat etme, yorumlama ve bir sonraki adıma karar verme becerileri ile ilişkili olan sorular doğrultusunda incelemişlerdir. Verilerin analizi yine Jacobs ve arkadaşları tarafından geliştirilen analiz şemasına göre yapılmıştır. Elde edilen bulgulara göre öğretmen adaylarının dikkat etme becerisinin yorumlama ve karar verme becerisine göre nispeten daha iyi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte adayların, öğrencilerin stratejilerindeki önemli matematiksel detayları göz ardı ederek daha çok öğrencilerin yapmış olduğu işlemlere dikkat ettiği ve yorumlarında öğrencilerin matematiksel anlayışını yansıtmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca, adaylarının öğretime ilişkin bir sonraki adımda yapacağı etkinliğe karar verme sürecinde, uygulama odaklı düşündükleri ve öğrencilerin düşüncelerinden ziyade kendi öğretim bilgilerini kullanma eğiliminde oldukları gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark etme, Öğrencilerin matematiksel düşünceleri, Öğretmen adayı

Türkçe sürüm için tıklayınız

1. Introduction

Studies on mathematics education have revealed that teachers can improve their teaching practices when they focus on student thinking (Kazemi & Franke, 2004; Lin, 2006; Steinberg, Empson & Carpenter, 2004). Analyzing student thinking serves as an important means for teachers to make more informed decisions and develop their practices (Crespo, 2000). Also, NCTM (2000) emphasizes that observing students and listening to their explanations and reflections, all this information, are essential in making instructional decisions for an effective learning. Therefore, paying attention to student's thinking and taking this into consideration while making instructional decisions are fundamental components of teaching. In this regard, teachers' ability to notice

Corresponding Author: Figen Bozkuş **email:** figen.bozkuss@gmail.com

Citation Information: Toluk Uçar, Z. & Bozkuş, F. (2023). An analysis of the prospective teachers' noticing of student mathematical thinking. *Turkish Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 1-24.

is a significant part of teaching, particularly in teaching and learning mathematics (Jacobs, Lamp & Philipp, 2010; van Es & Sherin, 2002).

1.1. Noticing

The studies in the context of reform have highlighted the role of the skill of noticing in teaching (van Es & Sherin, 2002). The skill of noticing has been defined by different researchers, focusing on numerous components (Jacobs et al., 2010; Mason, 2002; van Es & Sherin, 2002). In broad terms, noting that every act of teaching depends on noticing, Mason (2002) defines noticing as, "*noticing what children are doing, how they respond, evaluating what is being said or done against expectations and criteria, and considering what might be said or done next*." (p. 7). Moreover, Goodwin (1994), and Sherin and van Es (2009) named it as "*professional vision*" and conceptualized it as the experience of seeing and interpreting what is noteworthy in a complex classroom environment. From such a point of view, the ability to "*interpret*" is crucial for the ability to notice. Accordingly, van Es and Sherin (2002) developed a conceptual framework involving the concept of professional vision in teaching. This framework assumes that there are three main aspects of noticing in teaching, which are identifying what is noteworthy in a classroom situation, making connections between the specifics of classroom interactions, and using what one knows about the context to reason about them. While van Es and Sherin (2002; 2008; 2009) discussed teachers' noticing skills in teaching in their conceptual framework, Jacobs, Lamp and Philipp (2010), in a more specific way, focused on teachers' noticing of children's mathematical thinking. They called the specialization of teachers in this field "*professional noticing of children's mathematical thinking*."

Despite being less concerned about what and how teachers notice in their conceptual framework, Jacobs et al. (2010) put emphasis on what teachers notice in children's mathematical thinking. They conceptualized this specialization on the basis of a set of three interrelated skills, which are attending to children's strategies, interpreting children's understandings, and deciding how to respond based on children's understandings. Jacobs et al. reported that the skill of attending to children's strategies is related to what extent teachers pay attention to mathematical details of children's strategies. Here, particular emphasis is placed on the analysis of children's strategies. Since any detail in children's strategies provides an insight into their understanding. Indeed, research has shown that children's strategies vary, and the details of these strategies are important (Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 1999; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Lester, 2007). It is further emphasized that the ability of teachers to see specific details in the strategies employed by the students is as important as the way that they interpret the mathematical development and reasoning of students by using such details. The third component of noticing children's mathematical thinking is regarding how teachers justify their response or reaction to children's understanding. In other words, this component involves what teachers have learned from specific situations regarding a student's mathematical understanding and how they use what they have learned to decide on the next step. When all these skills are considered together, it is apparent that professional noticing expertise involves a complex set of skills related to students' mathematical thinking. The acts of attending to and interpreting students' mathematical ideas in a real classroom can therefore be challenging for teachers. Also, prospective teachers have difficulties attending to student's ideas and their experience of teaching mathematics in a real classroom environment is limited. It is important to provide prospective teachers with experiences that can provide exposure to real student thinking and to include related studies in teacher training programs. Therefore, it is expected that understanding prospective teachers' approaches to noticing students' mathematical ideas will provide insights into studies that could be conducted in teacher education programs.

1.2. Prospective Mathematics Teachers' Noticing of Students' Mathematical Thinking

An overview of the relevant literature has shown that there are numbers of studies analyzing prospective teachers' noticing skills in different contexts. While some of such studies (Llinares & Valls, 2010; McDuffie, Foote, Bolson, Turner, Aguirre, Bartell, Drake & Land, 2014; Osmanoğlu, Işıksal & Koç; 2012; Potari, Psycharis, Kouletsi & Diamantis, 2011; Santagata & Guariono, 2011; Shack, Fisher, Thomas, Eisenherdt, Tassel & Yader, 2013; Lynch & Perova, 2011; Walkoe, 2014) examined PST' noticing skills through observation and video analysis, others (Fernandez, Llinares & Valls, 2012; Fernandez, Llinares & Valls, 2013; Matamoros, Fernandez, Llinares & Valls; 2013) analyzed PST' noticing children's mathematical thinking and its development in the context of students' work. One of these studies, which was performed by Fernandez et al. (2012), investigated the level and the development of 7 prospective mathematics teachers' noticing skills of children's mathematical thinking through an online discussion. Their findings revealed that prospective teachers focused on operations more than conceptual understanding in students' answers. Prospective teachers stated that in the following step, based on the answers of students, they would ask more questions to the students to explain their solutions or ask them to describe the operations they performed in solving the problems. Fernandez et al. reported that the poor level of prospective teachers' noticing skills impacts their instructional decisions as well.

In addition, some of the studies focused on PST' noticing skills in specific mathematical contents (e.g proportional reasoning (Fernández et al. 2013; Son 2013); derivative (Sánchez-Matamoros et al. 2019); pattern generalization (Callejo & Zapatera 2017; Ozel, Işıksal-Bostan & Tekin-Sitrava; 2022); algebra (Walkoe, 2014);

quadrilaterals (Ulusoy & Çakıroğlu; 2021). For example, Fernandez, Llinares and Valls (2013) examined thirty-nine prospective teachers' noticing skills of children's thinking in problem-solving when they analyzed six students' solutions of different proportional and non-proportional problems. Prospective teachers were asked to examine these solutions in the context of Jacobs et al.'s (2010) framework. The findings suggested that prospective teachers had difficulty in describing students' mathematical thinking on the transition from additive reasoning to multiplicative reasoning. The researchers claimed that the reason for this is prospective teachers' poor subject-matter knowledge of additive and multiplicative situations. However, the ability to identify mathematical elements of student strategies for additive and multiplicative situations is necessary for interpreting mathematical thinking of these situations reflected by the solutions. The difficulty prospective teachers have at this point is indirectly related to their interpretation skills. It was observed that teacher candidates had difficulty interpreting the answers of students. While prospective teachers were making claims about what and how students understood and did not understand regarding their mathematical understanding, they focused on whether or not the students' answers were correct or incorrect and claimed that the correct answers were evidence of their understanding.

Similarly, the studies on the teacher's noticing student mathematical thinking in problem solving, reported that prospective teachers failed to fully identify mathematical elements in the operations performed by students, due to their lack of knowledge of mathematics (Matamoros vd., 2013; Zapatera & Callejo, 2013) Factors such as teachers' knowledge of content, and the knowledge of student thinking, perspectives, and experiences are components that affect the approach of attending to students' ideas and interpreting the details that they observe. (Schoenfeld, 2010; Goldsmith & Seago, 20111; Dreher & Kuntze, 2015). Especially, knowledge of student thinking is particularly important for noticing. PST should use knowledge of how students think as well as content knowledge in order to justify situations they attend (van Es & Sherin, 2002). Students can have different learning backgrounds and develop various thinking strategies, so PST need to follow how their mathematical thinking develops over time (Jacobs, et al., 2010). It is critical in teacher training that prospective teachers need to have more such experiences (Sherin, Jacobs, & Philipp, 2011; Sims & Walsh, 2009). Accordingly, the purpose of this study was to examine prospective teachers' approaches to noticing student thinking, with the expectation that findings could contribute to the improvement of teacher education programs.

2. Method

2.1. Research Model

This study employs a descriptive research model, which is one of the qualitative research methods, as it aims to reveal the prospective middle school mathematics teachers' noticing of children's mathematical thinking. Since a descriptive research study intends to provide an accurate presentation and description of a given situation, no change is made to the characteristics to be analyzed in the study (Creswell, 2014). In accordance with this model, prospective teachers were not intervened, except for the implementation of necessary tools for data collection while they were analyzing students' mathematical thinking.

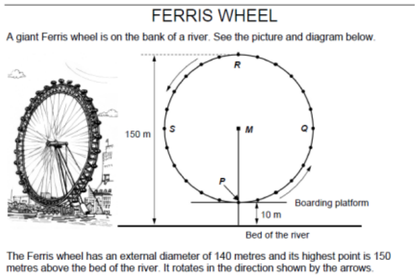
2.2. Participants

The study was performed with a total of 27 senior prospective secondary mathematics teachers in a program in a state university. Since the study was carried out within the scope of an elective course taught by the first author, all of the prospective teachers attending the course participated in the study. As all of them participated in the study, there was no criterion considered in the selection of the sample group, apart from their year of study. While the study took place, the prospective teachers also had the opportunity to observe a real classroom environment within the course of school experience. Considering that, it was determined that the study would be conducted with the senior prospective teachers. Prior to the study, no particular activity on the content of the study was carried out with the prospective teachers; however, some of the prospective teachers reported that they were involved in some activities, such as analyzing the answers of students within other courses at their program of study.

2.3. Data Collection and Data Collection Tools

In the data collection, the prospective teachers were asked to complete an analysis task on the answers of the 7th-grade students, with the purpose of studying their noticing skills. Thus, data collection procedure was performed in two stages. In the first stage, sample student answers were prepared for the prospective teachers to examine. Hence, the 7th-grade students in a state school were administered a test with 6 open-ended questions selected from the PISA test and then it was determined that different student answers for two questions in this test were to be used. The selected questions were related to space and shape, and a total of 7 student answers (4 answers for the 1st question and 3 answers for the 2nd question) were chosen. One of the solutions selected for the first question is mathematically correct and three are incorrect. In the second question, one solution is correct and the other two solutions are mathematically incorrect. Examining different student solutions for the same question is important in understanding PST's approaches to noticing students' ideas. The questions used in PISA, on the other hand, are questions that have more than one solution and reveal the students' mathematical ideas. Therefore, it was decided to use questions from the PISA. The criterion taken into consideration in the selection of the student answers was that the solutions included as various ways of thinking and different strategies as possible. The questions are presented in Table 1.

Table 1. The questions asked to students



Question 1:	**Question 2:**
The Ferris wheel rotates at a constant speed. The wheel makes one full rotation in exactly 40 minutes. John starts his ride on the Ferris wheel at the boarding point, *P*. Where will John be after half an hour?	The letter *M* in the diagram indicates the center of the wheel. How many meters (m) above the bed of the river is point *M?*

Regarding the selected student solutions, Table 2 demonstrates the sample solutions of four students.

Table 2. Sample student solutions

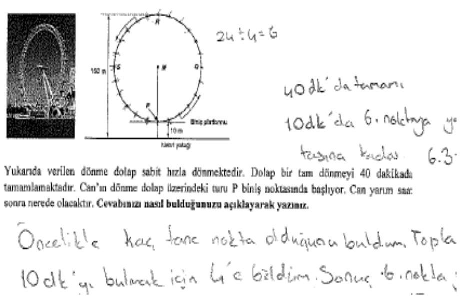
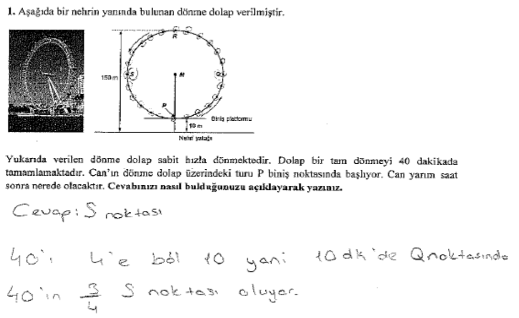
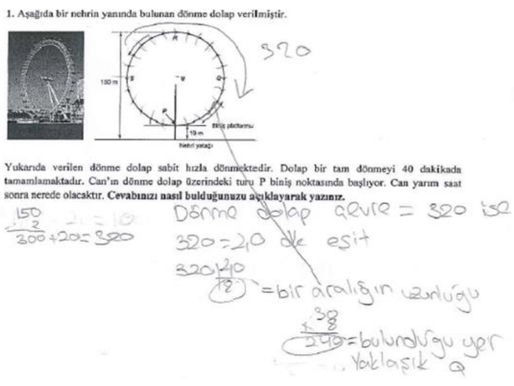
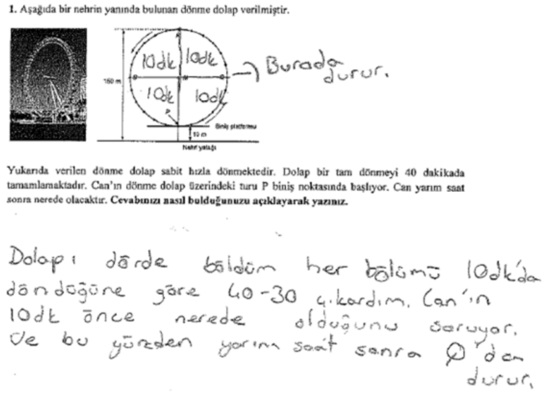
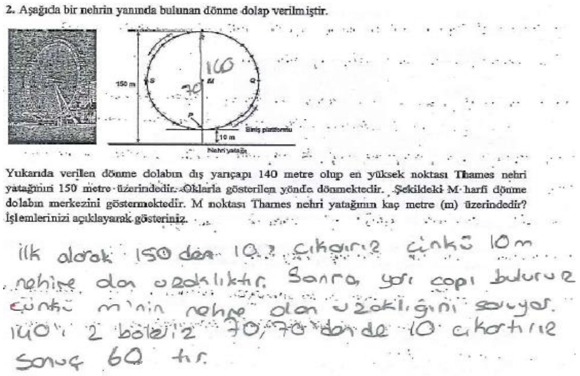
<table>
<tr><td colspan="2">Sample student solutions for the 1st question</td></tr>
<tr><td>1. Incorrect solution

As a first step, I determined how many dots there were. Add. To find 10 minutes, I divided by 4. The result is the sixth point. All in 40 min. Up to the 6th dot at the 10th minute. It is Q.</td><td>2. Correct solution

Divide 40 by 4 result is 10. So, in 10 minutes, at the point Q. ¾ of 40 becomes the point of S.</td></tr>
<tr><td>3. Incorrect solution
</td><td>4. Incorrect solution

I divided the wheel into four sections. Since each section took 10 minutes, I subtracted 40-30. In the question, Can is asked where he was 10 minutes ago. After half an hour, the wheel reaches Q.</td></tr>
</table>

Table 2 continued

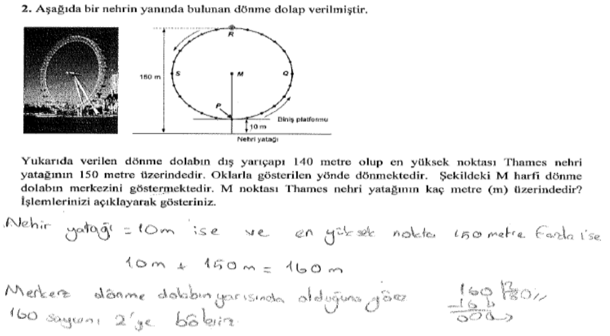
Sample student solutions for the 2nd question

1. Incorrect solution



First, we subtract 10 from 150 because 10m is the distance from the river. Then we find the radius because it asks for the distance of M from the river. We divide 140 by 2, 70. And subtract 10 from 70. The result is 60.

2. Incorrect solution



If the bed of the river = 10 and the highest point is more than 150 meters. 10m + 150m = 160 m
Since the center is halfway up the Ferris wheel, we divide the number 170 by 2.

In the second stage, the prospective teachers were asked to analyze the solutions of the students. The prospective teachers examined these solutions within the framework of the questions in relation to the subskills of attending to, interpreting, and deciding on the next step, which was identified by Jacobs et al. (2010) regarding the skill of noticing students' mathematical thinking. These questions were: 1) Please write your ideas about what the student did to solve the problem in detail (about the student's strategy, etc.), 2) Please explain what you have learned about the mathematical understanding of the student based on this solution of the problem, 3) Please assume that you have that student in your class and now explain your next step and next problem(s) that you would ask that student, and specify your reason to do that. The prospective teachers were given one day to answer the questions so that they can separately analyze the solutions of seven students in the context of 3 questions and write their descriptions in detail. That is, every prospective teacher answered 3 questions for each student solution. Hence, a prospective teacher wrote a total of 21 explanations. The number of explanations written by the prospective teachers was 561 in total (21x27). In this process, the teachers analyzed the student solutions separately and they were not intervened in any manner.

2.4. Data Analysis

The written data obtained from the prospective teachers were analyzed based on the framework developed by Jacobs et al. (2010), presented in Table 3. The framework focuses on the extent to which the prospective teachers could provide an evidence regarding students' thinking for each skill in their explanations.

Table 3. Categories and explanations regarding the skills of noticing

Category	*Explanation*
Attending to	Does he or she attend to the mathematical details noteworthy in the strategy employed by the student and explain it in detail?
Strong evidence	He or she explains the details of the strategies by referring to the problem in a comprehensive manner.
Limited evidence	He or she explains the details of the strategies without referring to the problem in a limited manner.
Insufficient evidence	He or she focuses on the accuracy of the operations by using very general expressions.
Interpreting	To what extent do the prospective teachers reason about the strategies or understandings of the students?
Strong evidence	He or she explains the student's understanding based on the solution of the student in detail.
Limited evidence	He or she explains the student's understanding based on the solution of the student superficially.
Insufficient evidence	He or she makes a judgment without linking it to the solution of the student or the problem by using very general statements.

Table 3 continued

Category	*Explanation*
Deciding on	To which extent is the next action to be taken by the prospective teachers based on the students' understanding and is their reasoning related to the students' mathematical thinking? Here, it is not important whether their strategy is the best one or not. What is important is the extent to which their next action is based on the students' understanding.
Strong evidence	He or she decides on the next step based on the solution of the student.
Limited evidence	He or she decides on the next step based on the solution of the student, but without justifying it.
Insufficient evidence	He or she decides on the next step without considering the solution of the student.

In the analysis, the answers of the prospective teachers were examined separately for each category. In doing so, the main consideration was the extent to which the prospective teachers provided an evidence specifically based on the solution of a student in their explanations. The answers of the prospective teachers were coded according to the degree of the evidences presented. The explanations made by the prospective teachers were categorized into strong evidence (2), limited evidence (1) and no evidence (0), depending on the nature of the evidences. The categorization procedure will be elaborated in the section of findings and examples from the explanations of the prospective teachers will be presented as well. In line with these codes, the answers were analyzed by two independent researchers. Subsequently, the analyses were compared to ensure the inter-coder reliability. Following that, the coders reached mutual agreement, and coding was completed. The findings reveal the percentage distribution of the results obtained after the coding.

3. Findings

This study analyzed the prospective secondary mathematics teachers' skill of noticing children's mathematical thinking. Results are presented in two parts. While the first part discusses the tendency of the prospective teachers' skills of noticing, the second part presents the results related to each dimension of noticing, along with some sample explanations of the prospective teachers.

3.1. Tendency of the Prospective Teachers' Noticing Skills

With the purpose of seeing the general picture regarding the prospective teachers' skills of noticing, the first part focuses on their tendency. Figure 1 shows the distribution of the types of evidences presented by the prospective teachers, in relation to the dimensions of attending to, interpreting, and deciding on.

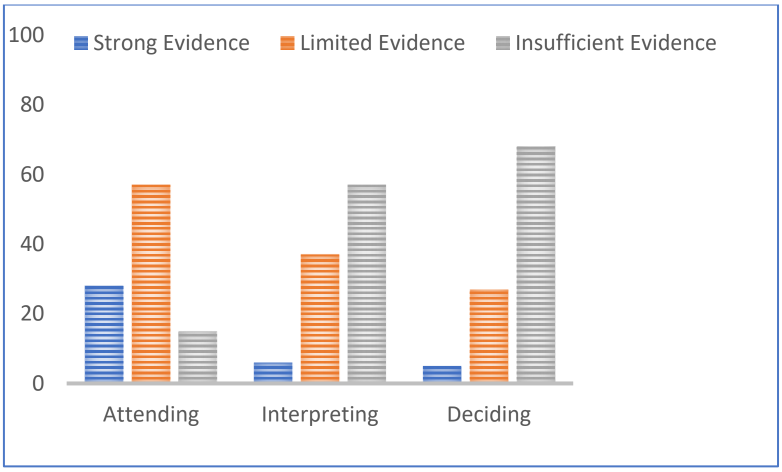


Figure 1. The distribution of the evidences presented by the prospective teachers based on the dimensions of noticing

As seen in Figure 1, the prospective teachers presented more strong and limited evidences in the dimension of attending to students' mathematical thinking. The number of strong evidences presented by them tended to decrease from the dimension of attending to, towards that of interpreting and deciding. The skill of attending to is the fundamental skill of noticing, and it is relatively easier for the prospective teachers to identify the details in the answers of the students for the skill of attending to, when compared to interpreting and deciding on. Therefore, this is not an unexpected result. Yet, given the evidences presented by them in interpreting students' mathematical thinking and deciding on the next step, their skills of interpreting and deciding on can be considered as poor. It is indeed remarkable that there were only nine explanations presenting robust evidence out of 189 explanations provided by the prospective teachers in the dimension of deciding the next step.

3.2. Attending to Students' Mathematical Thinking

The skill of noticing students' mathematical thinking first requires the skill of attending to the mathematical details in the strategies employed by the students. This section discusses the details that the prospective teachers attended to in the strategies of the students, in the context of their explanations and their justifications. The answers of the prospective teachers were coded according to the evidences presented by them. If a prospective teacher clearly stated how the student provided the solution, that is, whether the student employed the givens in the problem, which operations the student performed, which representations or symbols the student used in the solution, etc., the prospective teacher was deemed to present a strong evidence from the solution of the student. 28% of the explanations provided by the prospective teachers included a strong evidence. Below are some examples from the explanations of the prospective teachers with a strong evidence:

> *"The student did not pay attention to the givens in the question. The rotation of the ferris wheel is indicated by arrows in the question, but the student tried to solve the problem without paying attention to that. Thus, the student oversimplified the question to the fact that the full rotation of the wheel takes 40 minutes. The student counted the divisions on the circle, then calculated how many divisions the wheel would advance in 10 minutes and multiplied it by 3. Following that, the student found out the point Q." (S14- The solution of the 1st question)*

> *"The student clearly understood the question. He or she was aware of what the question asks for, but did not pay attention to the rotation of the circle. The student found the total number of marks on the circle, and divided 40 minutes by 4 and got 10 minutes. Then, the student divided the total number of marks by 4 and found the number of marks corresponding to 10 minutes." (S9- The solution of the 1st question)*

As seen in the explanations of the prospective teachers, they first noted the extent to which the students paid attention to the givens in the problem. Then, they expressed the mathematical operations performed by the students in their answers in detail. Also, if a prospective teacher mentioned the general characteristics of the strategies employed by the students and did not describe the solution of the student in detail in his or her explanations, then, the prospective teacher was deemed to present a limited evidence from the solution of the student. The prospective teachers with a limited evidence did not provide any information whether the student paid attention to the constraints in the problem or not. Rather, they superficially explained the operations performed by the student. 57% of the explanations provided by the prospective teachers included a limited evidence. Below are some examples from the explanations of the prospective teachers with a limited evidence:

> *"The student is attentive. He or she paid attention to the direction of the arrow. In a practical way, the student calculated the distance that the wheel would cover in 10 minutes. He or she correctly found where it would be in 30 minutes." (S14- The solution of the 1st problem)*

> *"The student tried to calculate its circumference. He or she divided this number by 40 and found how many meters it would rotate in 1 minute." (S12- The solution of the 1st problem)*

15% of the explanations provided by the prospective teachers included an insufficient evidence. These prospective teachers failed to present any evidence indicating that they paid attention to any detail in the solutions of the students or the strategies employed by them. The teachers merely labeled the solutions of the students as correct or wrong. Yet, they did not state an opinion about how the students solved the problem or which operations they performed. Below are some examples from the explanations of these prospective teachers:

> *"The child correctly understood what the question asks for. However, he or she did not understand the direction of the rotation." (S8- The solution of the 1st problem)*

> *"The solution of the student is correct, but the student marked the wrong point as he or she did not pay attention to the direction of the arrow."(S7- The solution of the 1st problem)*

As can be seen in the examples given, the prospective teachers expressed their own opinions on the solutions of the students superficially and failed to provide any explanation on the mathematical details in the solutions.

3.3. Interpreting Students' Mathematical Thinking

The skill of noticing students' mathematical thinking involves the skill of attending to the mathematical details in the strategies employed by students, as well as interpreting these details and making sense of students' mathematical thinking. In this section, the prospective students' skill of interpreting students' mathematical thinking is classified into strong, limited or insufficient evidence, based on the explanations and evidences provided by the prospective teachers.

If a prospective teacher, while interpreting the students' mathematical thinking, made sense of the details in the strategies employed by the students, stated how these details provided an insight into the understanding of the students, and associated the noteworthy details in the answers of the students to their mathematical development, the prospective teacher was deemed to present a strong evidence from the solution of the student. 6% of the explanations provided by the prospective teachers included a strong evidence. Below are some examples from the explanations of the prospective teachers with a strong evidence:

> *"The student solved this question by using fractions. The student considered 40 minutes as a whole fraction, then divided the ferris wheel into four parts. Acknowledging that a period of 30 minutes represents ¾, he or she found the point S." (S15- The solution of the 1st problem)*

> *"The student was aware that it is necessary to use the diameter of the circle to find its radius. He or she was well aware of the need to have the radius, but after finding that the radius is 70 meters, the student was confused about whether to include or exclude the distance between the boarding platform and the river bed." (S2- The solution of the 2nd problem)*

As seen in the explanations above, S15 analyzed the solution of the student to the first question and stated that the student referred to fractions. Further, with the statement that "*The student considered 40 minutes as a whole fraction",* S15 explained the mathematical thinking of the student based on the operations performed by him or her and provided evidences for the reasoning of the student. Another prospective teacher made a statement for the solution to the 2nd problem. With the statement that "*The student was aware that it is necessary to use the diameter of the circle to find its radius",* S2 reported that the student has the mathematical knowledge required for the solution of the problem and emphasized that the student achieved to analyze the problem. In other words, it is evident that these prospective teachers provided evidences for the operations and the mathematical thinking of the students.

Remarkably, some of the prospective teachers made sweeping statements to interpret the solutions of the students. The interpretations of these teachers for the students' mathematical thinking were not profound, and their explanations included limited evidences. It was determined that 36% of the answers of the prospective teachers presented limited evidences. Below are some examples from the explanations of the prospective teachers:

> *This is a student with poor geometric thinking skills. He or she has not fully grasped the concept of distance. He or she could not form a mental image of the shape in the question. The knowledge of the student on the subject of circle is not sufficient. (S14- The solution of the 2nd problem)*

> *The student failed to reason about the solution of the problem. He or she does not know how to calculate the circumference and understand what the question asks for. (S12- The solution of the 2nd problem)*

As demonstrated in the examples above, the teachers superficially analyzed the way of thinking of the students. For instance, the prospective teacher failed to provide a justification for the argument that "*The knowledge of the student on the subject of circle is not sufficient."*That is, the teacher did not inform about how he or she reached that opinion, specify any operation of the student, or identify the information on circle that the student did not understand. Therefore, the teacher failed to present sufficient evidence on the students' mathematical thinking. In a similar way, other prospective teachers interpreted the students' mathematical thinking through baseless statements such as that the student does not have a deep understanding of mathematics, that the student fails to associate the problem with daily life, that his or her mental thinking skills are obviously good, that the student has a quick mind.

While some prospective teachers presented strong and limited evidence, the interpretation of other prospective teachers about the solutions of the students included insufficient evidence. These teachers failed to present any evidence or the evidences presented by them did not indicate the children's mathematical understanding at all. Rather, their explanations included some general statements on the operations or the behaviors of the students. The answers of some teachers are as follows:

> *The student has correctly understood what the question asks for. He or she clearly expressed his or her opinion. (S16- The solution of the 1st problem)*

> *The method of the student is reasonable, different and a short-cut. (S12- The solution of the 1st problem)*

> *The student felt the need to indicate the circumference by a numerical value. He or she was confused about 150m and 10m in the question. (S1- The solution of the 1st problem)*

57% of the explanations of the prospective teachers presented an insufficient evidence. It can be stated that the number of the teachers with an insufficient evidence is higher compared to that of the teachers with a strong evidence and a limited evidence.

3.4. Deciding on the Next Step based on the Students' Mathematical Thinking

The skill of noticing involves the skill of deciding how to respond on the basis of the students' mathematical thinking, following the skill of interpreting the students' mathematical thinking. Here, the focus was on the justifications provided by the prospective teachers about the practices or the decisions that they would perform to improve the students' mathematical thinking. The main consideration was not whether the teacher asks the best problem to the student, but the extent to which the problem to be asked by the teacher challenges the student and in which ways that such problem based on the student's mathematical thinking. Therefore, the primary emphasis was not on what the teacher would do, but on why the teacher would do that. Accordingly, the justifications of the teachers were considered to include strong, limited or insufficient evidence.

If a prospective teacher decided on his or her next step based on the students' mathematical understanding, provided specific evidence depending on the students' mathematical thinking and acted with the intention of comprehending the students' thinking, the prospective teacher was deemed to present a strong evidence. 5% of the explanations of the prospective teachers presented a strong evidence. S16, one of these teachers, provided the explanation presented in Figure 2 for the solution of a student.

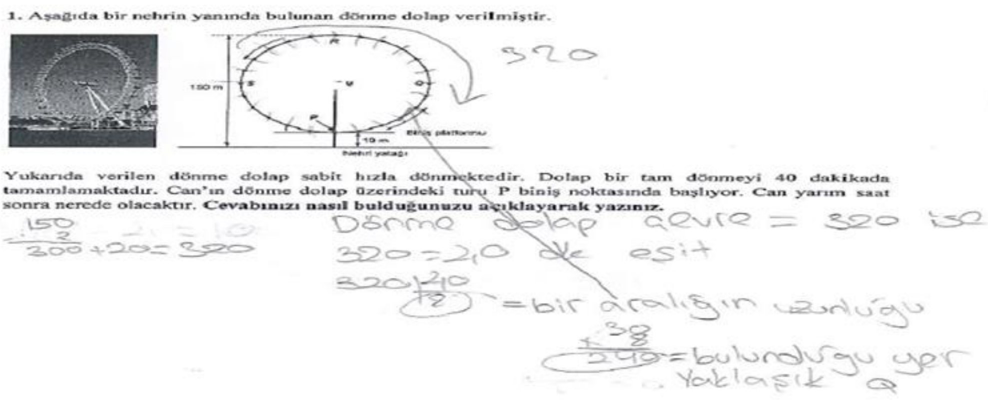


Figure 2. Sample student solution

The student has not comprehended how to calculate the circumference of the circle. He or she considered the length on the side as the circumference. To correct that, the student can take part in the activities that involve finding the circumference of a circle. The perimeter of a circle is measured with a rope, and then the length of the rope is measured. And, the circumference of a circle can be found through its radius. Thus, the student would grasp the relationship. (S16 - The solution of the 1st problem.)

The prospective teacher, S16, determined the way of thinking of the student in the operations, identified the concept that the student did not understand and decided on what to do about the student's lack of understanding for the concept in the next step. In the process that the prospective teachers decided on the next step, the teachers were expected to offer some suggestions to support the mathematical development of the student based on the information obtained from the strategies, understanding and knowledge of the student. It is notable that only two prospective teachers provided such suggestions.

Beside, some prospective teachers stated that so as to understand the reason of the operations performed by the student, they would ask the student why he or she did that, what the reason was for the operation that he or she performed, and how he or she came to such conclusion, etc. in the next step. These teachers articulated that they would want to know the way of thinking of the students. The explanations of these teachers were also considered to present a strong evidence. Some of the examples from the answers of the teachers are as follows:

"I would ask the student how he or she concluded that Can would arrive the point S in 10 minutes. I would ask him or her to explain why he or she multiplied it by 3 and also whether the time elapsed for the paths in equal distance, which are travelled at a constant speed, is equal to each other. Then, I would write some questions based on the answer." (S2- The solution of the1st problem)

"I would ask the student why he or she multiplied it by 150. As the student calculated the circumference of the ferris wheel as 120, he or she obviously had difficulty in finding the circumference of a circle. I would ask "Is the circumference of a circle calculated in this way?" Then, I would ask him or her "Is it necessary in this question to calculate the circumference?" (S1- The solution of to the1st problem)

On the other hand, some prospective teachers noted that they would ask certain questions to enable the student to understand his or her misconceptions and errors in the operations, or offered more general suggestions such as delivering another lecture on mathematical concepts like diameter-radius, distance and circumference.

The explanations of these teachers were considered to present a limited evidence. Below are some examples from the explanations of some of the prospective teachers:

> *"If the ferr is wheel was tangent to the river bed, what would be the distance? I would ask that as the student has misconception regarding the concept of distance."(S8- The solution of the 1st problem)*
>
> *"Firstly, I would ask some questions about the units. I would enable the student to realize the unit that the question asks for. I would give simple examples on circle. Once the student has understood these examples, he or she would notice the mistake." (S11- The solution of the1st problem)*
>
> *"I would ask the formula for calculating the circumference and provide different questions for the student to calculate it. For this question, I would ask the student whether it is possible to solve it without calculating the circumference or not." (S12- The solution of the1st problem)*

As seen above, the prospective teachers reported that they would base their practices on the conceptual knowledge or the operational knowledge of the students. 27% of the explanations of the prospective teachers presented a limited evidence, as given above.

While some prospective teachers presented a strong or a limited evidence, the study concluded that 68% of the explanations provided by the teachers included an insufficient evidence. These teachers failed to associate the student's understanding with the structure of the problem and to provide a mathematical justification for their next step. Based on such answers, these teachers did not give much consideration to the students' mathematical thinking, but they focused on the structure of the problem. For instance, they stated that they would make changes to the structure of the problem, such as simplifying the structure of the problem by reducing the figures in the problem, writing the length given on the shape, and changing the direction of the ferris wheel and that they would ask the same problem once again. Some of the answers of these prospective teachers are as follows:

> *The student would be provided with the data given in a specific story to be calculated along a single axis. The student would be asked to solve it in line with the story. (S5- The solution of the2nd problem)*
>
> *The problem would be integrated into material and asked to the student. The student would be informed of the direction of the arrow and asked to solve the problem by rotating it. (S7- The solution of the1st problem)*

The answers above indicated that the teachers more focused on the structure of the problem and offered practice-based suggestions. On the other hand, although some prospective teachers stated the alternatives of the problems that they could ask the student in the next step, they failed to provide a justification for why they would ask these problems. They did not explain how they want to change the student's mathematical thinking through the problem they would ask, or how such problem would support the student's mathematical thinking. For that reason, the answers of these teachers were considered to present insufficient evidence.

4. Conclusion, Discussion, and Suggestions

This study analyzed the dimensions of attending to, interpreting and deciding on in the prospective teachers' skills of noticing students' mathematical thinking. In this regard, one of the main findings of the study is that the prospective teachers were relatively better at the dimension of attending to than the dimension of interpreting and deciding on. It is remarkable that they were lacking at the dimension of deciding on. When every dimension of the prospective teachers' skills of noticing considered separately, it is notable that the teachers mostly presented limited evidence at the dimension of attending to. The reason is that the explanations of the prospective teachers overlooked the noteworthy mathematical details both in the problem given and in the strategies of the students, and thus they were limited in nature in terms of the operations performed by the students. Yet, the skill of attending to the students' strategies requires not only marking the answer as correct or incorrect or describing the operations performed, but also knowing the noteworthy mathematical details in the problem and defining the strategy of the student based on such knowledge (Jacobs, et al., 2010). In other words, teachers have sufficient mathematical knowledge in order to be able to identify the mathematical details in student solutions. Fernandez (2013) achieved similar results and concluded that the incompetency of the prospective teachers in identifying the mathematical details in the strategies of the students results from their poor content knowledge of mathematics. The findings of this study reaffirm this argument as well. The prospective teachers, who failed to determine the necessary mathematical thinking to solve the problem or simply focused on the correct answer in the solution of the problem, described the answers of the students only superficially. This subsequently affects the process that the prospective teachers interpreted the students' mathematical thinking. Indeed, the identification of the mathematical details in students' answers the first step for understanding their mathematical thinking in solving problems (Fernandez, 2013).

One of the main findings of this study is that the prospective teachers were lacking in the skill of interpreting the answers of the students and the evidences presented by them did not indicate the students' mathematical understanding. The teachers did not emphasize anything on the students' understanding in their interpretations; rather, they stated that the students could not read the visual given in the problem, perform the operations, and come up with a practical solution for the problem, and highlighted the correctness of the methods used by the students, the difficulties encountered and the operational errors made by the students. Further, they made some superficial statements regarding the students' mathematical reasoning in their explanations, such as that their mental thinking skills are poor and that their mathematical understanding is not good enough. The use of such statements reflected that the prospective teachers discounted the conceptual knowledge of the students while interpreting their strategies and failed to explain the mathematical thinking behind the errors made and difficulties encountered by the students. Rhodes (2017), reaching similar findings, reported that the details that the teachers paid attention to and their interpretations in relation to the students' mathematical thinking depend on the problem given and their own mathematical knowledge. Considering this argument and the findings of this study, the reason for such superficial interpretations might be the lack of the conceptual knowledge required to understand the problem given among the prospective teachers. Yet, since the mathematical content of the problems particularly used in this study was rather easy to understand, aspects such as the prospective teachers' knowledge of the students' thinking rather than their content knowledge, may have affected their interpretation skills. So that teachers can interpret the students' mathematical thinking, the use of content knowledge as well as the information on the way that students think are essential for them (van Es & Sherin, 2002). The knowledge of the students' thinking includes information on what students know about a certain concept, what they think about the concept, and how a concept develops in a student's mind (Hiil, Ball & Schilling; 2008). However, the findings showed that the prospective teachers were not competent in this regard, which is supported by the fact that the prospective teachers focused on what the students failed to do, rather than what they achieved, in their interpretations. This can also imply that the prospective teachers did not take into consideration the mathematical knowledge and mathematical thinking of the students. Yet, once teachers realize the potential of students' thinking, they can base their next step on the potential of students and enhance the students' mathematical thinking.

This study also found that the prospective teachers tended to come up with practice-based ideas and to use their own instructional knowledge rather than the students' thinking in the process of deciding on the activity on the next step in the teaching process. Very few prospective teachers stated that they would question the students to understand their mathematical thinking and evaluate their mathematical understanding to improve their thinking. Other prospective teachers reported that they would ask the students questions to comprehend the operations performed by the students and to make them realize their errors in the operations. Mason (2002) highlighted that such questions would be useful to think of alternative ways to use the students' mathematical thinking. Therefore, the ability of teachers to ask questions is critical in using students' mathematical thinking. Another important finding regarding this dimension of the skill of noticing is that the prospective teachers were more lacking in presenting evidences to support the students' mathematical thinking than the dimension of attending to and interpreting. In a similar way, Gichobi (2013) reported that this results from the lack of experience of the prospective teachers with students. Indeed, the skill of deciding on requires being aware of the development of the student's mathematical thinking, besides a strong skill of attending to and interpreting. The knowledge on the development of the students' mathematical thinking is necessary for selecting the problems that would challenge the students' thinking so that these students can improve themselves. For that reason, the skill of deciding the next step is a higher level of skill than the skill of attending to and interpreting.

In conclusion, the skills of attending to and interpreting the students' mathematical thinking are essential for the practices on mathematics education and are required for the improvement of teaching. The prospective teachers may be involved in in-class discussions to analyze the problem solutions of the students for the improvement of such skills. These in-class discussions rich in mathematical aspects bring valuable experiences to the prospective teachers for their skill of understanding and interpreting the students' thinking. The skills of the prospective teachers of coming up with alternative ideas for teaching and of offering certain experiences to improve such skills with limited pedagogical content knowledge are supported in teacher training as well. The relevant studies revealed that the prospective teachers' skills of noticing have been considerably improved (Fernandez, Llinares & Valls, 2012; Matamoros et al., 2013; Zapatera & Callejo; 2013). The following suggestions can be provided to prospective teachers regarding the content of teaching practice, which provides opportunities to observe the teaching process and students.

The teaching experience can enrich the prospective teacher's knowledge of student ideas, and their ability to attend to and interpret mathematical thinking; yet there are findings that put forward that these skills are not sufficient for teachers to decide on the next step regarding the students' mathematical thinking (Jacobs et al., 2010). It is notable that the skill can be improved by means of long-term professional development programs. In this regard, teacher trainers bear tremendous responsibility. Ball, Sleep, and Bass (2009) emphasized that teacher trainers need to design the teaching practices that support prospective teachers in recognizing their students' mathematical ideas in their teacher training programs. It is particularly useful to organize group discussions to examine sample student solutions so that prospective teachers can discuss in depth the possible mathematical misconceptions and errors of their classmates. Classroom discussions that are rich in mathematics provide prospective teachers with valuable experiences in terms of understanding and interpreting students' ideas. It will also be an important experience for them to think about what they can do next based on the inferences they get from discussions. In addition, video club activities that include analysis and evaluation of teaching can be offered as suggestions for practices that can be included in the teacher training program.

The following suggestions can be put forward for further studies in line with the findings of this study: This study was performed with prospective teachers, and a similar study might be conducted with teachers. Moreover, the data of this study were limited to the written statements made by the prospective teachers; a further study may analyze the teachers' or prospective teachers' skills of noticing through in-class or different discussion environments. Also, another study might focus on the impact of the in-class discussions, which would be regularly held, regarding the students' mathematical thinking on the teachers' or prospective teachers' skills of noticing.

Funding: No funding was reported for this study.

Ethics declaration: Ethics declaration: Author declared that the Ethics Committee of Abant İzzet Baysal University approved the study, on 15 February 2018 with the protocol code: 2018/50.

Declaration of interest: The authors declare no competing interest.

Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Matematiksel Düşüncelerini Fark Etme Becerilerinin İncelenmesi

1. Giriş

Matematik eğitiminde yapılan araştırmalar, öğretmenlerin, öğrenci düşüncelerine odaklandıklarında öğretimsel uygulamalarını geliştirebileceklerini ortaya koymaktadır (Kazemi & Franke, 2004; Lin, 2006; Steinberg, Empson & Carpenter, 2004). Öğrenci düşüncesi bilgisinin öğretmenlerin kendi sınıflarında daha bilinçli kararlar vermesinde ve uygulamalarını iyileştirmesinde yardımcı bir kaynak olduğu düşünülmektedir (Crespo, 2000). Benzer şekilde NCTM (2000) de öğrencilerin gözlemlenmesi, açıklamalarının ve düşüncelerinin dikkatli bir şekilde dinlenmesi ve elde edilen bu bilgilerin, öğrenme sürecini etkili hale getirmek için öğretimsel kararlar almada kullanılmasının önemli olduğunu vurgulamaktadır. Dolayısıyla öğretmenlerin öğrenci düşüncelerine dikkat etmesi ve bu düşünceleri öğretimsel kararlarında kullanabilmesi öğretimin önemli bileşenlerindendir. Bu anlamda öğretmenlerin fark etme *(noticing)* becerileri, öğretimin önemli bir parçası olup, özellikle matematik öğretiminde dikkate değer hale gelmektedir (Jacobs, Lamp & Philipp, 2010; van Es & Sherin, 2002).

1.1. Fark Etme Becerisi (Noticing)

Reform bağlamında yapılan çalışmalar, öğretmenin fark etme becerisinin öğretim sürecindeki önemini vurgulamaktadır (van Es & Sherin, 2002). Fark etme becerisi literatürde farklı araştırmacılar tarafından çeşitli bileşenler dikkate alınarak tanımlanmıştır (Jacobs vd., 2010; Mason, 2002; van Es & Sherin, 2002). Genel olarak ifade edilecek olursa, Mason (2002) öğretmenin her eyleminin farkındalığına bağlı olduğu görüşünden yola çıkarak fark etmeyi, "*öğrencinin ne yaptığını fark etme, nasıl cevap vereceğini, ne söylendiğini ya da beklentiler ve kriterlere karşı yapılanları değerlendirme ve bir sonraki adımda ne yapılacağını düşünme*" (s.7) şeklinde tanımlamıştır. Bunun yanı sıra, Goodwin (1994) ile Sherin ve van Es (2009) bu beceriyi, *"profesyonel gözlem*" olarak isimlendirmiş, profesyonel gözlemi ise kompleks sınıf ortamının önemli özelliklerini görme ve yorumlama deneyimi olarak kavramsallaştırmıştır. Bu bakış açısına göre fark etmede "yorumlama" becerisi önem kazanmaktadır. Bu duruma bağlı olarak, van Es ve Sherin (2002), öğretimde profesyonel gözlem düşüncesini içeren bir kavramsal çerçeve geliştirmişlerdir. Geliştirilen kavramsal çerçeveye göre öğretim sürecindeki farkındalığın üç temel boyutu vardır. Bunlar, öğretim sürecinin önemli anlarının tanımlanması, sınıf etkileşimindeki spesifik durumlarla, öğrenme ve öğretme ilkeleri arasında ilişkinin kurulması ve bu durumları yorumlayabilmek için bilinen bilgilerin kullanılması şeklindedir. van Es ve Sherin (2002; 2008; 2009) geliştirmiş oldukları kavramsal çerçevede, öğretmenlerin öğretim sürecindeki fark etme becerilerini incelerken, Jacobs vd., (2010), daha spesifik olarak öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel düşüncelerine dair farkındalığa odaklanmışlardır. Öğretmenlerin bu alanda uzmanlaşmasını, "*öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin profesyonel farkındalığı* (*Professional noticing of children's mathematical thinking)"* olarak isimlendirmişlerdir.

Jacobs ve arkadaşları (2010), kavramsal çerçevelerinde, öğretmenler ne fark ediyor - nasıl fark ediyor durumu ile daha az ilgilenirken, öğrencilerin matematiksel düşüncelerinde öğretmenler neye dikkat ediyor sorusunu ele almışlardır. Bu uzmanlık, öğrencilerin stratejilerine dikkat etme, öğrencilerin anlamalarını yorumlama ve öğrencilerin anlamalarını temel alarak nasıl karşılık vereceğine karar verebilme olmak üzere birbiri ile ilişkili üç beceri ile kavramsallaştırılmıştır. Jacobs ve arkadaşları (2010), öğrencilerin stratejilerine dikkat etme becerisinde, öğretmenlerin belirli öğretimsel durumlardan spesifik olarak öğrencilerin stratejilerindeki matematiksel detaylarda neye dikkat ettiği boyutu ile ilgilendiklerini belirtmişlerdir. Burada, öğrenci stratejilerini incelemenin önemli olduğunu vurgulamışlardır. Çünkü öğrenci stratejilerindeki detaylar öğrencilerin anlamaları ile ilgili ipuçları sunmaktadır. Nitekim yapılan araştırmalar da öğrencilerin stratejilerinin karışık olduğunu ve aynı zamanda stratejilerin detaylarının ise önemli olduğunu göstermektedir (Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 1999; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Lester, 2007). Bununla birlikte, öğretmenin öğrencilerin kullandıkları stratejilerdeki spesifik detayları görebilmesi kadar, bu detayları kullanarak öğrencilerin matematiksel gelişimini ve matematiksel muhakemesini nasıl yorumladığının da önemli olduğu vurgulanmaktadır. Fark etme yaklaşımının üçüncü bileşeni de, öğretmenin öğrencilerin anlamalarına karşılık verdiği tepkiyi ya da cevabı nasıl gerekçelendirdiği ile ilgilidir. Bir başka ifadeyle, üçüncü bileşende öğretmenlerin bir öğrenci ile ilgili spesifik durumdan o öğrencinin matematiksel anlayışına yönelik ne öğrendiği ve bu öğrendiklerini bir sonraki adıma karar vermede nasıl kullandığına odaklanılmaktadır. Söz konusu bu beceriler bir arada düşünüldüğünde, öğrencilerin matematiksel düşüncelerine yönelik profesyonel farkındalık uzmanlığının kompleks becerileri içerdiği görülmektedir. Dolayısıyla sınıf ortamında öğrencilerin matematiksel düşüncelerine dikkat etme ve yorumlama öğretmenler için kolay bir süreç değildir. Benzer şekilde öğretmen adayları da öğrenci düşüncelerine dikkat etmede zorluk yaşamaktadırlar (Güner & Akyüz, 2017) ve gerçek sınıf ortamında matematik öğretimine dair deneyimleri sınırlıdır. Dolayısıyla gerçek öğrenci düşünceleriyle karşılaşabilecek deneyimler sunulması ve bu yöndeki çalışmaların öğretmen eğitim programlarının bir parçası haline gelmesi önemli bir unsurdur. Bu nedenle, öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerine fark etme yaklaşımlarını anlamak, öğretmen eğitim programlarında yapılabilecek çalışmalara bakış açısı sunacağı beklenmektedir.

1.2. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Matematiksel Düşüncelerini Fark Etme Becerileri

İlgili literatüre bakıldığında, öğretmen adaylarının fark etme becerilerini, farklı bağlamlarda inceleyen çalışmalar olduğu görülmektedir ve bu çalışmalar daha çok örnek öğrenci çözümlerini inceleme üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bu araştırmalardan bazıları (Llinares & Valls, 2010; McDuffie, Foote, Bolson, Turner, Aguirre, Bartell, Drake & Land, 2014; Osmanoğlu, Işıksal & Koç, 2012; Potari, Psycharis, Kouletsi & Diamantis, 2011; Santagata & Guariono, 2011; Shack, Fisher, Thomas, Eisenherdt, Tassel & Yader, 2013; Star, Lynch & Perova, 2011; Walkoe, 2014) gözlem ve video analizleri ile öğretmen adaylarının fark etme becerilerini incelerken, bazı araştırmalar (Fernandez, Llinares & Valls, 2012; Fernandez, Llinares & Valls, 2013; Matamoros, Zapatera & Callejo, 2013) ise öğrenci çalışmaları bağlamında öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerilerini ve bu becerilerin gelişimini incelemiştir. Bu çalışmalardan Fernandez ve arkadaşları (2012), 7 matematik öğretmen adayının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerilerinin ne seviyede olduğunu ve gelişimini on-line tartışma ortamı çerçevesinde incelemişlerdir. Elde edilen bulgularda, öğretmen adaylarının, öğrencilerin cevaplarında kavramsal anlamadan çok işlemlere odaklandıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adayları, öğrencilerin cevaplarından yola çıkarak bir sonraki adımda, öğrencilere kendi cevaplarını açıklamaları için daha çok soru sorma ya da problem çözümünde yapmış oldukları işlemleri açıklamalarını isteyeceklerini belirtmişlerdir. Fernandez ve arkadaşları öğretmen adaylarının farkındalık becerilerinin zayıf olduğuna dikkat çekerek, bu durumun adayların öğretimsel kararlarını da etkilediğini belirtmişlerdir.

Bunun yanı sıra bazı araştırmalar ise spesifik olarak matematiksel kavramlar; orantısal akıl yürütme (Fernández vd., 2013; Son 2013); türev (Sánchez-Matamoros vd., 2019); örüntüleri genelleştirme (Callejo & Zapatera 2017; Özel, Işıksal-Bostan & Tekin-Sitrava; 2022); cebirsel düşünme (Walkoe, 2014); dörtgenler (Ulusoy & Çakıroğlu; 2021) odağında öğretmen adaylarının fark etme yaklaşımlarını incelemişlerdir. Bu çalışmalardan, Fernandez vd., (2013), 39 üçüncü sınıf matematik öğretmen adaylarının, orantısal ve orantısal olmayan durumlar ile ilgili altı öğrencinin farklı dört problem çözümünü analiz etme yaklaşımlarını incelemişlerdir. Adaylardan bu çözümleri, Jacobs ve arkadaşlarının (2010) çerçevesi bağlamında incelemeleri istenmiştir. Elde edilen bulgularda, öğretmen adayların öğrencilerin toplamsal akıl yürütmeden çarpımsal akıl yürütmeye geçişi ile ilgili matematiksel düşüncelerini tanımlamada zorlandıklarını tespit etmişlerdir. Bu durumun ise öğretmen adaylarının toplamsal ve çarpımsal durumlar ile ilgili konu alan bilgisinin zayıf olmasından kaynaklandığı şeklinde açıklamışlardır. Oysaki öğrencilerin toplamsal ve çarpımsal durumlarda kullandığı stratejilerdeki matematiksel elemanları tanımlayabilmek, öğrencilerin problem çözümündeki matematiksel düşüncelerini yorumlayabilmek için gereklidir. Öğretmen adaylarının, bu noktada zorlanması dolaylı olarak öğrenci düşüncelerini yorumlamalarını da etkilediği söylenebilir. Nitekim öğretmen adaylarının öğrencilerin cevaplarını yorumlamada zorlandıkları görülmüştür. Öğretmen adayları, öğrencilerin matematiksel anlamalarına ilişkin neyi, nasıl anlayıp anlamadığına yönelik fikir yürütürken öğrencilerin cevaplarının doğru ya da yanlış olma durumuna odaklanmışlar ve anlamalarına yönelik doğru cevapları kanıt olarak gösterdiklerini belirtmişlerdir.

Benzer şekilde, öğretmen adaylarının öğrencilerin problem çözümlerindeki matematiksel düşüncelerini fark etme becerilerinin incelendiği çalışmalarda, öğretmen adaylarının matematiğe yönelik alan bilgilerinin eksik olmasından dolayı öğrencilerin yapmış oldukları işlemlerdeki matematiksel öğeleri tam olarak yansıtamadıkları ifade edilmiştir (Matamoros vd., 2013; Zapatera & Callejo, 2013). Öğretmenlerin içerik bilgisi, öğrenci düşünce bilgisi, bakış açıları ve deneyimleri gibi faktörler öğrenci düşüncelerine dikkat etme ve dikkat edilen detayları yorumlama becerilerini etkileyen bileşenlerdir (Dreher & Kuntze, 2015; Goldsmith & Seago, 2011; Schoenfeld, 2010). Özellikle öğrenci düşünce bilgisi, fark etmenin önemli bir parçasıdır. Öğretmen adaylarının, dikkat ettikleri durumları gerekçelendirebilmeleri için, içerik bilgisi kadar öğrencilerin nasıl düşündüğüne dair bilgilerini de kullanabiliyor olmaları gerekmektedir (van Es & Sherin, 2002). Öğrencilerin öğrenme süreçleri birbirinden farklı olabilir ve çeşitli düşünme stratejileri geliştirebilirler. Bu nedenle, öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin zaman içerisindeki değişimi takip etmelerine ihtiyaçları vardır (Jacobs vd., 2010). Dolayısıyla, öğretmen eğitim programlarının, adaylara bu yönde daha fazla deneyim yaşayabilecek fırsatlar sunması beklenmektedir (Sherin, Jacobs, & Philipp, 2011; Sims & Walsh, 2009). Bu bilgiler doğrultusunda, bu araştırmada öğretmen eğitimi programlarında yapılabilecek çalışmalara katkı bulanabileceği öngörüsüyle, öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerini fark etme yaklaşımları incelenmiştir. Bir başka ifadeyle, çalışmada öğretmen adaylarının bir öğrencinin cevabını incelediğinde, neye ve hangi detaylara dikkat ettikleri, öğrencilerin matematiksel anlamalarını nasıl yorumladıkları ve öğrencilerin matematiksel anlamalarını desteklemek için neler yapabilecekleri çerçevesinde fark etme becerileri incelenmiştir.

2. Yöntem

2.1. Araştırma Modeli

Bu araştırmada, ortaokul matematik öğretmen adaylarının, öğrencilerin matematiksel düşüncelerine ilişkin fark etme becerilerinin ortaya çıkarılması amaçlandığı için nitel araştırma yöntemlerinden betimsel araştırma deseni kullanılmıştır. Betimsel araştırmada, verilen bir durumun olabildiğince iyi tanımlanması ve ortaya koyulması amaçlandığı için araştırılan özellik üzerinde bir değişiklik yapılması söz konusu değildir (Creswell, 2014). Söz konusu desene uygun olarak, öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini inceleme sürecinde veri toplamak için gerekli araçların uygulanması dışında herhangi bir müdahalede bulunulmamıştır.

2.2. Katılımcılar

Araştırma, bir devlet üniversitesinde 4. sınıfta öğrenimine devam eden 27 ortaokul matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Çalışma, araştırmanın birinci yazarı tarafından yürütülen bir seçmeli ders kapsamında yapıldığı için derse katılan bütün öğretmen adayları çalışmanın örneklemini oluşturmaktadır. Çalışmaya katılan öğretmen adayları eş zamanlı olarak okul deneyimi dersi kapsamında, farklı sınıf ortamlarında öğretmenleri ve öğrencileri gözlemeye devam etmişlerdir. Bu durum göz önüne alınarak araştırmanın, 4. sınıf öğretmen adayları ile yürütülmesine karar verilmiştir. Derse katılan bütün öğretmen adayları çalışmada yer aldığı için, örneklem grubunun seçiminde sınıf seviyesi hariç herhangi bir ölçüt dikkate alınmamıştır. Araştırma öncesinde öğretmen adaylarıyla uygulamanın içeriğine ilişkin özel bir çalışma yapılmamıştır ancak bazı öğretmen adayları daha önce almış oldukları dersler kapsamında öğrenci çözümlerini inceleme gibi etkinlikler yaptıklarını belirtmişlerdir.

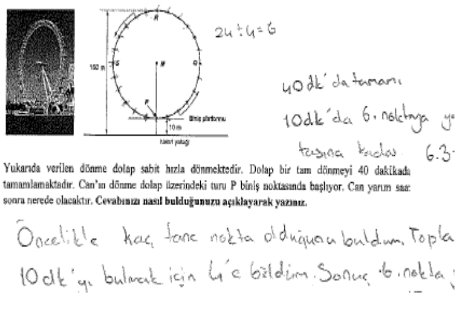
2.3. Veri Toplama Süreci ve Veri Toplama Araçları

Veri toplama sürecinde, öğretmen adaylarının fark etme becerilerini incelemek için, adaylar ile 7. sınıf öğrencilerine ait problem çözümlerini analiz etme çalışması yapılmıştır. Bu nedenle veri toplama süreci iki aşamada gerçekleşmiştir. Birinci aşamada, adayların incelemesi için örnek öğrenci çözümleri hazırlanmıştır. Bunun için öncelikle, bir devlet okulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerine, PISA sınavından seçilen 6 soruluk açık uçlu bir test uygulanmış ve bu testten iki soruya ait farklı öğrenci cevaplarının kullanılmasına karar verilmiştir. Seçilen sorular, uzay ve şekil konusu ile ilgili olup, bu sorulara ait toplamda 7 öğrenci cevabı (1. soru için 4, 2. soru için 3 adet) seçilmiştir. Birinci soru için seçilen çözümlerden bir tanesi matematiksel olarak doğru, üç tanesi ise yanlış çözümdür. İkinci soruda ise bir çözüm doğru, diğer iki çözüm ise matematiksel olarak yanlıştır. Öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerini fark etme yaklaşımlarını anlamak için aynı soruya dair farklı öğrenci çözümlerinin incelenmesi önemli görülmüştür. PISA'da kullanılan sorular ise, birden fazla çözüm üretmeyi ve öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarmaya sağlayabilecek nitelikte sorulardır. Bu nedenle, soruların PISA testinden alınmasına karar verilmiştir. Öğrenci cevaplarının seçiminde, çözümlerin mümkün olduğu kadar birbirinden farklı düşünme süreçlerini ve farklı stratejileri içermesi dikkate alınmıştır. Seçilen öğrenci çözümlerine ilişkin Tablo 1'de örnek olarak dört öğrencinin çözümü sunulmuştur.

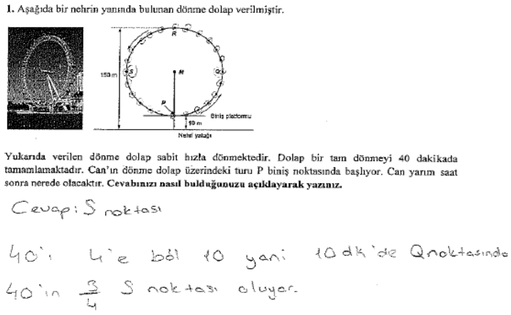
Tablo 1. Örnek öğrenci çözümleri

1.Soruya ilişkin çözümü matematiksel olarak doğru ve yanlış olan örnek öğrenci cevapları

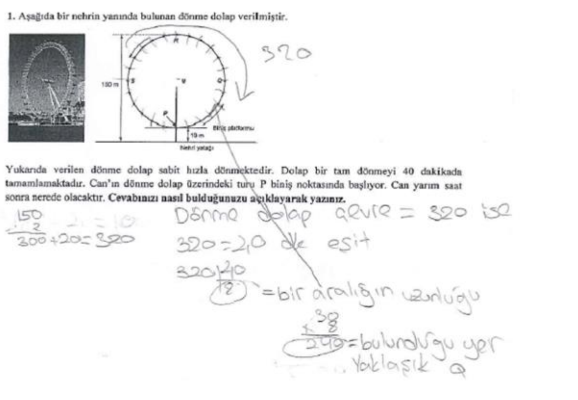
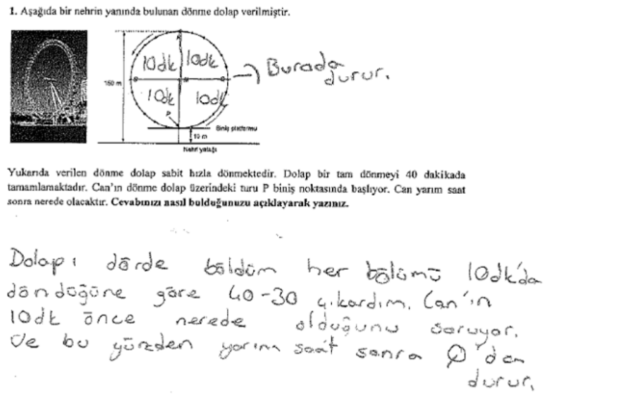
1. Hatalı çözüm



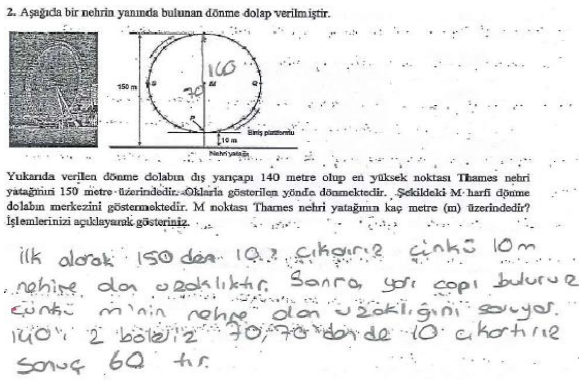
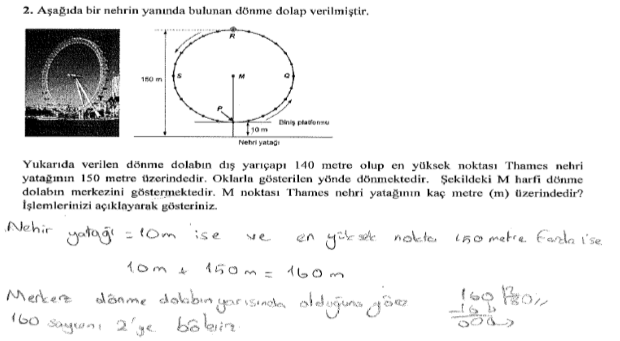
2. Doğru çözüm



Tablo 1'in devamı

3. Hatalı çözüm	4. Hatalı çözüm
	

2. Soruya ilişkin çözümü matematiksel olarak yanlış olan örnek öğrenci cevapları

1. Hatalı çözüm	2. Hatalı çözüm
	

Veri toplama sürecinin ikinci aşamasında ise, öğretmen adaylarından öğrenci çözümlerini incelemeleri istenmiştir. Öğretmen adayları, öğrenci çözümlerini, Jacobs ve arkadaşları (2010) tarafından geliştirilen öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etmeye yönelik dikkat etme, yorumlama ve bir sonraki adıma karar verme becerileri ile ilişkili olan sorular doğrultusunda incelemişlerdir. Bu sorular, 1) öğrencinin problemi çözmek için ne(ler) yaptığına dair (kullandığı strateji, vs.) düşüncelerinizi ayrıntılı olarak yazınız, 2) öğrencinin bu problem çözümünden matematiksel kavrayışı hakkında ne öğrendiğinizi açıklayınız ve 3) bu öğrencinin öğretmeni olduğu varsayımıyla, bir sonraki adımınız, öğrenciye soracağınız bir sonraki problem(ler)in neler olacağını gerekçesi ile açıklayınız şeklindedir. Öğretmen adaylarından, farklı yedi öğrenci çözümlerini, yukarıda verilen 3 soru doğrultusunda incelemeleri ve açıklamalarını detaylı bir şekilde yazmaları istenmiştir. Böylece bir öğretmen adayı toplamda 21 açıklama yazmıştır. Çalışmada araştırmaya katılan öğretmen adayları öğrenci çözümlerine dair toplam 567 (21×27) açıklama yazmışlardır. Bu süreçte adaylar birbirinden bağımsız bir şekilde öğrenci çözümlerini incelemiş ve araştırmacılar tarafından herhangi bir müdahalede bulunulmamıştır.

2.4. Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarından elde edilen yazılı veriler, yine Jacobs ve arkadaşlarının (2010) geliştirdiği, Tablo 2'de verilen çerçeve kullanılarak analiz edilmiştir. Bu çerçeveye göre, her bir beceri için öğretmen adaylarının açıklamalarında hangi ölçüde öğrencilerin düşüncelerine dair kanıt sunduğuna dikkat edilmiştir.

Tablo 2. Fark Etme becerilerine ilişkin kategoriler ve açıklamaları

Kategori	*Açıklama*
Dikkat Etme	Öğrencinin kullandığı stratejide matematiksel olarak önemli olan detaylara dikkat ediyor mu ve ayrıntılı olarak açıklıyor mu?
Güçlü kanıt	Stratejilerin detaylarını ayrıntılı biçimde probleme referans vererek açıklıyor.
Sınırlı kanıt	Stratejilerin detaylarını sınırlı düzeyde probleme referans vermeden açıklıyor.
Yetersiz kanıt	Çok genel ifadelerle işlemlerin doğruluğuna odaklanıyor.

Tablo 2'nin devamı

Kategori	Açıklama
Yorumlama	Öğretmen adaylarının, öğrencilerin stratejilerine ya da anlamalarına yönelik yaptığı muhakemelerinin boyutu ne düzeydedir?
Güçlü kanıt	Öğrenci çözümüne bağlı olarak öğrencinin kavrayışını detaylı biçimde açıklıyor.
Sınırlı kanıt	Öğrenci çözümüne bağlı olarak öğrencinin kavrayışını yüzeysel biçimde açıklıyor.
Yetersiz kanıt	Çok genel ifadelerle öğrenci çözümü ve problemle ilişkilendirmeden yargılamada bulunuyor.
Karar Verme	Öğretmen adaylarının, bir sonraki adımda yapacağı işlem, ne boyutta öğrencilerin anlamalarına dayalı ve sunduğu gerekçeler öğrencilerin matematiksel düşünceleri ile ne kadar ilişkili? Burada önemli olan en iyi strateji olup olmaması değil. Bir sonraki adımda yapacaklarını ne kadar öğrenci anlamasıyla temellendiriyor?
Güçlü kanıt	Öğrenci çözümüne bağlı olarak bir sonraki adımına karar veriyor.
Sınırlı kanıt	Öğrenci çözümüne bağlı fakat gerekçe sunmadan bir sonraki adımına karar veriyor.
Yetersiz kanıt	Öğrenci çözümünden bağımsız kararlar veriyor.

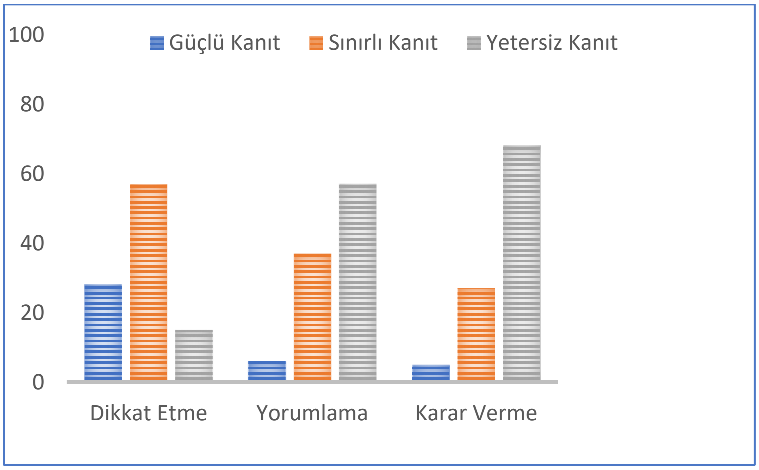
Analiz sürecinde öğretmen adaylarının cevapları her bir kategori için ayrı ayrı incelenmiştir. Öğretmen adaylarının cevapları incelenirken açıklamalarında hangi ölçüde spesifik öğrenci çözümlerinden kanıt sunduklarına dikkat edilmiştir. Sunulan kanıtların derecesine bağlı olarak öğretmen adaylarının cevapları kodlanmıştır. Öğretmen adaylarının cevaplarında yapmış olduğu açıklamalar, sunmuş oldukları kanıtlara göre güçlü kanıt (2), sınırlı kanıt (1) ve kanıt yok (0) şeklinde kodlanmıştır. Bu sürece bulgular bölümünde öğretmen adaylarının açıklamalarından örneklerle desteklenerek daha ayrıntılı yer verilecektir. Belirlenen kodlamalar doğrultusunda, adayların cevapları bağımsız iki araştırmacı tarafından analiz edilmiştir. Kodlayıcılar-arası güvenirliğini sağlamak için daha sonra bu analizler karşılaştırılmıştır. Bunu takiben kodlayıcılar arasındaki görüş birliği sağlanmış ve kodlamalar tamamlanmıştır. Kodlamaların ardından elde edilen sonuçların yüzdelik dağılımı bulgulara yansıtılmıştır.

3. Bulgular

Bu araştırmada, ortaokul matematik öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerileri incelenmiştir. Bu bölümde, elde edilen bulgular iki aşamada sunulacaktır. İlk aşamada adayların fark etme becerilerinin eğilimine değinilecektir, ikinci aşamada ise farkındalığın her bir boyutu ayrı olarak öğretmen adaylarından örnek açıklamalarla desteklenerek sunulacaktır.

3.1. Öğretmen Adaylarının Fark Etme Eğilimi

Bulguların ilk aşamasında, öğretmen adaylarının fark etme becerilerine ilişkin genel resmi görmek adına, fark etme eğilimleri incelenmiştir. Şekil 1'de dikkat etme, yorumlama ve karar verme boyutlarına ilişkin adayların sunmuş oldukları kanıt türlerinin dağılımı verilmiştir.



Şekil 1. Fark etme becerisinin boyutlarına göre öğretmen adaylarının sunmuş oldukları kanıtların dağılımı

Şekil 1'de görüldüğü üzere, adayların öğrencilerin matematiksel düşüncelerine dikkat etme boyutunda, yorumlama ve karar verme boyutuna göre daha fazla güçlü kanıt ve sınırlı kanıt sunduğu görülmektedir. Yorumlama ve karar verme boyutunda ise adayların çoğunlukla az kanıt sunma eğiliminde oldukları görülmektedir. Dikkat etme, farkındalığın temel becerisidir ve yorumlama ve karar verme becerilerine göre adayların öğrencilerin cevaplarındaki detayları tanımlayabilmesi nispeten daha kolaydır. Ancak, adayların öğrencilerin matematiksel düşüncelerini yorumlama ve bir sonraki adımda ne yapacağına karar verme sürecinde sundukları kanıt durumlarına bakıldığında, bu iki becerinin oldukça zayıf olduğu söylenilebilir. Özellikle karar verme boyutunda sunulan 189 açıklamadan, güçlü kanıt sayısının 9 olması oldukça dikkat çekici bir durumdur.

3.2. Öğrencilerin Matematiksel Düşüncelerine Dikkat Etme

Öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerisi, ilk olarak öğrencilerin kullandıkları stratejilerdeki matematiksel detaylara dikkat edebilme becerisini gerektirir. Bu bölümde de öğretmen adaylarının, öğrencilerin stratejilerinde fark ettikleri detaylar, yapmış olduğu açıklamalar ve sundukları gerekçeler bağlamında değerlendirilmiştir. Sunmuş oldukları kanıtlara göre öğretmen adaylarının cevapları kodlanmıştır.

Öğretmen adayları, öğrencilerin çözümlerinde ne yaptığını açık bir şekilde ifade ediyorsa yani öğrencinin problemde verilenleri kullanıp kullanmadığını, öğrencinin ne tür işlemler yaptığını, öğrencinin çözümlerinde kullandığı temsiller ya da semboller gibi detayları açıklıyorsa bu adayların yaklaşımı öğrencilerin çözümlerinden güçlü kanıt sunduğu şeklinde değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının yapmış oldukları açıklamaların % 28'i güçlü kanıt içermektedir. Bu duruma örnek olabilecek bazı adayların açıklamaları şu şekildedir:

> *"Öğrenci soruda verilenlere dikkat etmemiş. Soruda dönme dolabın dönüşü oklarla gösterilmiş ama öğrenci dikkat etmeden soruyu çözmeye çalışmış. 40 dakikada bir tam tur attığını bildiği için soruyu daha basite indirgemeye çalışmış. Çarktaki bölmeleri saymış. 10 dakikada kaç bölme ilerleyeceğini bulup 3 ile çarpmış. Q noktasını bulmuş." (Ö14- 1. soru)*

> *"Öğrenci soruyu net bir şekilde anlamıştır. İstenenin ne olduğunun farkındadır fakat dairenin dönüş yönüne dikkat etmemiştir. Dairenin toplam çizgi sayısını bulmuştur. 40 dakikayı 4'e bölmüş ve 10 dakikayı elde etmiştir daha sonra toplam nokta sayısını da 4'e bölerek 10 dakikaya karşılık gelen nokta sayısını bulmuştur." (Ö9- 1. soru)*

Öğretmen adaylarının açıklamalarında da görüldüğü üzere, adaylar öncelikle öğrencilerin problemde verilenlere ne kadar dikkat ettiğini açıklamışlardır. Daha sonra öğrencilerin çözümlerinde yapmış oldukları matematiksel işlemleri ayrıntılı bir şekilde ifade etmişlerdir. Diğer yandan öğretmen adayları yapmış oldukları açıklamalarında, öğrencilerin kullandıkları stratejilerin genel özelliklerinden bahsediyorsa ve öğrencinin çözümünü ayrıntılı bir şekilde açıklamıyor ise adayların yaklaşımı öğrenci çözümlerinden sınırlı kanıt sunduğu şeklinde değerlendirilmiştir. Sınırlı kanıt sunan öğretmen adayları, öğrencilerin problemde verilenlere dikkat edip etmediği hakkında herhangi bir bilgi sunmamışlardır. Daha çok öğrencinin yapmış olduğu işlemleri yüzeysel bir şekilde ifade etmişlerdir. Bu noktada öğretmen adaylarının açıklamalarının % 57'si sınırlı kanıt içermektedir. Sınırlı kanıt sunan bazı öğretmen adaylarının cevapları şu şekildedir;

> *"Öğrenci dikkatli. Okun yönüne dikkat etmiş. Pratik düşünebilmiş. 10 dakikada nereye geleceğini hesaplamış. 30 dakikada nerede olacağını bulmuş ve doğru bulmuş." (Ö14-1.soru)*

> *"Çevresini hesaplamaya çalışmış. Çevre diye bulduğu sayıyı da 40'a bölerek 1 dakikada kaç metre döndüğünü bulmuş." (Ö12-1. soru)*

Öğretmen adaylarının açıklamalarının % 15'i ise yetersiz kanıt içermektedir. Bu adaylar ise öğrencilerin çözümlerinde ya da stratejilerindeki detaylara ilişkin herhangi bir kanıt sunmamışlardır. Açıklamalarında, öğrencilerin çözümlerini sadece doğru ya da yanlış olarak nitelendirmişlerdir. Ancak problemi nasıl çözdüğü veya ne gibi işlemler yaptığına yönelik herhangi bir fikir belirtmemişlerdir. Bu kategoride yer alan bazı adayların açıklamaları şöyledir;

> *"Çocuk soruda isteneni doğru anlamış. Ancak şekildeki dönüş yönünü doğru anlamamıştır."(Ö8-1. soru)*

> *"Öğrencinin çözümü doğru fakat ok yönüne dikkat etmediği için yanlış noktayı işaretlemiştir."(Ö7-1. soru)*

Verilen örneklerde de görüldüğü üzere, öğretmen adayları incelediği öğrencinin çözümüne dair fikirlerini yüzeysek olarak belirtmişlerdir ve öğrenci çözümündeki matematiksel detaylara ilişkin herhangi bir açıklama sunmamışlardır.

3.3. Öğrencilerin Matematiksel Düşüncelerini Yorumlama

Öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerisi, öğrencilerin stratejilerindeki matematiksel detaylara dikkat etmenin yanı sıra bu detayları yorumlamayı ve öğrencilerin matematiksel düşüncelerini anlamlandırmayı içermektedir. Bu bölümde de, adayların öğrencilerin matematiksel düşüncelerini yorumlayabilme becerileri, onların yapmış oldukları açıklamalar ve sunmuş oldukları kanıtlar çerçevesinde, güçlü, sınırlı ve yetersiz kanıt olarak değerlendirilmiştir.

Öğretmen adayları, öğrencilerin matematiksel düşüncelerini yorumlarken, öğrencilerin stratejisindeki detayları anlamlandırıyorsa, ilgili detayların öğrencinin anlamasını nasıl yansıttığını tanımlıyorsa ve öğrenci cevabında dikkat edilen detayları öğrencilerin matematiksel gelişimleri ile ilişkilendirdiğine dair açıklamalar sunuyorsa bu öğretmen adayının cevabı güçlü kanıt içerdiği şeklinde değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeye göre adayların açıklamalarının % 6'sının güçlü kanıt içerdiği tespit edilmiştir. Güçlü kanıt sunan bazı öğretmen adaylarının cevapları şu şekildedir;

"Öğrenci bu soruyu kesirlerle ilişkilendirip çözmüştür. Öğrenci 40 dk.'yı bir tam kesir olarak kabul etmiş. Dönme dolabı şekil üzerinde dörde bölmüştür. 30 dk.'nın ¾'ü temsil ettiğini kabul edip muhakeme ederek S noktasını bulmuştur." (Ö15- 1. soru)

"Öğrenci yarıçapı bulmak için yalnız çemberin çapının baz alınması gerektiğinin farkındadır. Ayrıca yarıçapın bulunması gerektiğinin de farkındadır fakat yarıçapı 70 metre bulduktan sonra biniş platformu ile nehir yatağı arasındaki mesafeyi ekleyip çıkarma konusunda bir sıkıntı yaşamıştır." (Ö2- 2.soru)

Yukarıda verilen açıklamalara bakıldığında, Ö15 birinci soruya ilişkin öğrencinin çözümünü incelemiş ve öğrencinin soruyu kesirlerle ilişkilendirdiğini belirtmiştir. Ayrıca, "*öğrenci 40 dk.'yı bir tam kesir olarak kabul etmiş"* ifadesiyle öğrencinin yapmış olduğu işlemlerde matematiksel olarak nasıl düşündüğünü belirtmiş ve öğrencinin akıl yürütmesine dair yorumunda kanıt sunmuştur. Bir diğer adayın cevabı ise 2. soruya yöneliktir. Ö2 çember sorusunda, yarıçapı bulmak için "*çemberin baz alınması gerektiğinin farkındadır"* açıklaması ile öğrencinin problemin çözümü için gerekli matematiksel bilgiye sahip olduğunu belirtmiştir ve öğrencinin problemi analiz edebildiğine dair yorum yaptığı görülmektedir. Yani buradaki öğretmen adaylarının, öğrencilerin yapmış olduğu işlemleri ve matematiksel olarak nasıl düşündüğüne ilişkin kanıtlar sunduğu görülmektedir.

Bazı öğretmen adaylarının ise öğrencilerin çözümlerini yorumlamada çok genel ifadeler kullandıkları görülmüştür. Bu adayların yorumlamaları öğrencilerin matematiksel düşüncelerine yönelik derinlemesine olmayıp, *açıklamaları* sınırlı kanıtlar içermektedir. Bu doğrultuda adayların cevaplarının % 37'sinin sınırlı kanıt içerdiği tespit edilmiştir. Örnek olabilecek bazı öğretmen adaylarının cevapları şöyledir;

"Öğrencin geometrik düşünme becerisi düşük. Uzaklık kavramını oturtamamış. Sorudaki şekli canlandıramamış. Öğrencinin çember konusu ile ilgili bilgisi yeterli değil." (Ö14-2. soru)

"Öğrenci sorunun çözümü için akıl yürütememiş. Çevre hesaplamayı bilmiyor. Soruda ne demek istediğini anlamamış." (Ö13-1. soru)

Verilen örneklerde de görüldüğü üzere adaylar, öğrencilerin düşünme biçimine yönelik yüzeysel ifadeler kullanmışlardır. Örneğin, "*öğrencinin çember konusu ile ilgili bilgisi yeterli değil"* ifadesinde öğretmen adayı bu argüman için bir gerekçe sunmamıştır. Yani bu düşünceyi öğrencinin hangi işleminden yola çıkarak ulaştığı noktasında bilgi vermemiş ya da öğrencinin çembere dair hangi bilgiyi anlamadığını belirtmemiştir. Dolayısıyla, öğrencilerin matematiksel düşünceleri ile ilgi yeterli kanıt sunmamıştır. Benzer şekilde, diğer öğretmen adaylarının da, *öğrencinin matematiksel kavrayışı çok yüksek değil, problemi günlük hayat ile bağdaştıramamış, zihinsel düşünme becerisinin iyi olduğu görülüyor, pratik düşünebiliyor* gibi herhangi bir dayanağı olmayan ifadelerle ile öğrencilerin matematiksel düşüncelerine ilişkin yorum yaptıkları görülmüştür.

Güçlü ve sınırlı kanıt sunan öğretmen adaylarının yanı sıra bazı adayların öğrenci çözümlerine dair yorumlarının yetersiz kanıt içerdiği belirlenmiştir. Bu adaylar, herhangi bir kanıt sunmamışlardır ya da sunduğu kanıtların çocukların matematiksel anlamaları ile ilgili olmadığı görülmüştür. Yapmış oldukları açıklamalar, daha çok öğrencinin davranışına ve işlemlerine yönelik olup genel ifadeler içermektedir. Birkaç adayın cevapları şu şekildedir;

"Öğrenci sorudan istenileni doğru anlamış. Düşüncesini net olarak ifade etmiştir." (Ö16- 1. Soru)

"Öğrencinin gittiği yol mantıklı, farklı ve kestirme bir yol." (Ö12-1.soru)

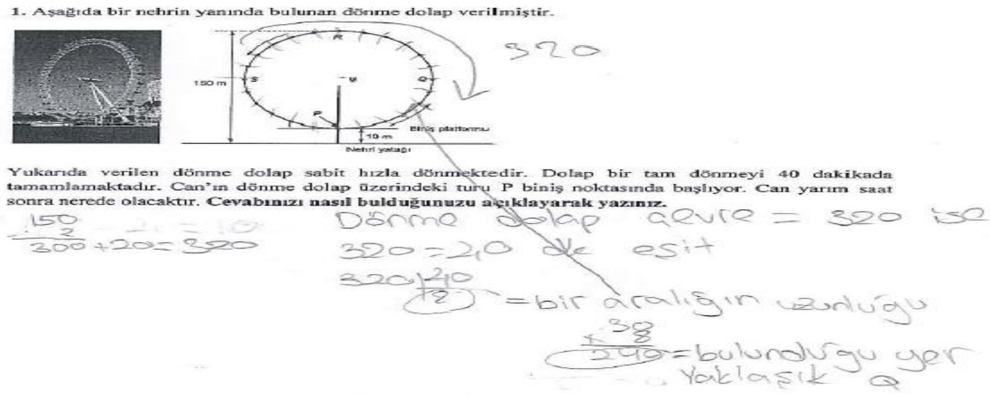
"Öğrenci çevreyi sayısal bir değer ile ifade etme ihtiyacı hissetmiş. Verilen 150 m ve 10 m de aklını karıştırmıştır." (Ö1-1.soru)

Öğretmen adaylarının açıklamalarının %57'si yetersiz kanıt içermektedir. Bun noktada, güçlü kanıt ve sınırlı kanıt sunan öğretmen adaylarına göre çok fazla sayıda adayın yeterli kanıt sunmadığı söylenebilir.

3.4. Öğrencilerin Matematiksel Düşüncelerini Temel Alarak bir Sonraki Adıma Karar Verme Süreci

Fark etme becerileri, öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin yorumlanmasının ardından, öğrencilerin düşüncelerini temel alarak bir sonraki adımda ne yapacağına karar vermeyi içermektedir. Yani adaylardan beklenen, öğrenci stratejilerinden, öğrencinin anlamasına ve bilgisine yönelik elde edilen bilgiye dayalı olarak matematiksel gelişimini destekleyecek öneriler sunmasıdır. Dolayısıyla bu bölümde, öğretmen adaylarının, öğrencilerin düşüncelerini anlamalarını ve bu düşünceleri bir üst düzeye çıkarma adına yapacağı işlemleri ya da alacağı kararlar için nasıl bir gerekçe sunduğu dikkate alınmıştır. Burada önemli olan öğretmenin öğrenciye en iyi problemi sorması değil, sorması planlanan problemin öğrenciyi ne kadar zorladığı ve öğrencinin matematiksel düşüncesine ne şekilde temellendirildiğidir. Dolayısıyla, öğretmenin ne yapacağından çok neden yapacağı durumu önceliklidir. Adayların sunmuş oldukları gerekçeler de bu yönde güçlü, sınırlı ve yetersiz kanıt olarak değerlendirilmiştir.

Öğretmen adayları bir sonraki adımda yapacağı adımları öğrencilerin matematiksel anlamalarına göre belirliyor, öğrencilerin matematiksel düşüncelerini kullanarak spesifik kanıtlar gösteriyorsa ve öğrencilerin düşünceleri anlamaya yönelik işlemler yapıyorsa bu adayların cevapları güçlü kanıt sunduğu şeklinde değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının açıklamalarına bakıldığında adayların %5'inin açıklamasının güçlü kanıt içerdiği görülmektedir. Bu adaylardan Ö16'nın, bir öğrencinin çözümüne karşılık açıklaması şu şekildedir;



Şekil 2. Örnek öğrenci çözümü

"Bu öğrenci çemberin çevresinin nasıl bulunacağını kavrayamamıştır. Yanda verilen uzunluğa çemberin çevresi demektedir. Bunu düzeltmek adına öğrenciyle çemberin çevresinin bulunduğu çalışmalar yapılabilir. Önce öğrenciden bir çember materyalinin ip ile etrafını ölçmesini isterim. Daha sonra cetvel ile ipin uzunluğunu ölçmesini isterim. Sonrasında da çemberin yarıçapını ip ile bulmasını isterim. Elde ettiği sonuçlar doğrusunda çemberin yarıçapı ile çevresi arasında ilişki kurmaya yönlendiririm. Böylece öğrenci yarıçap ile çemberin çevresi arasındaki ilişkiyi kavrayabilecektir. (Ö16- 1.soru)

Ö16, öğrencinin yaptığı işlemlerden nasıl düşündüğünü ve matematiksel olarak neyi anlamadığını tespit etmiştir. Bir sonraki adımında öğrencinin anlamlandıramadığı noktaya odaklanacağını belirtmiş ve istenilen öğrenmeyi gerçekleştirme adına neler yapacağını tanımlamıştır. Bazı öğretmen adayları da bir sonraki adımında, öğrencinin yaptığı işlemlerin gerekçesini anlamaya yönelik, neden böyle yaptın, yapmış olduğun işlemin gerekçesi nedir, burada nasıl düşündün gibi sorular kullanacaklarını belirtmişlerdir. Öncelikli olarak öğrencilerin ne düşündüğünü anlamak istediklerini ifade etmişlerdir. Bu adayların açıklamaları da güçlü kanıt kategorisinde değerlendirilmiştir. Örnek olabilecek adayların cevapları şu şekildedir;

"Bu öğrenciye 10 dakikada Can'ın S noktasında olduğunu neye göre yazdığını sorardım. Ve neye dayanarak 3 ile çarpıp cevaba ulaştığını açıklamasını isterdim. Sabit hızla alınan eşit yollar için geçen zamanın eşit olup olmayacağını sorar ve buna yönelik problemler yazardım." (Ö2-1. soru)

"Öğrenciye "Neden 150'yi iki ile çarptın" diye sorardım. Burada dönme dolabın çevresinde 120 dediği için öğrencinin çemberin çevresini bulma bilgisi ile ilgili sorunları olduğu belli. "Çemberin çevresini bu şekilde mi buluyoruz?" sorusunu sorardım. Daha sonra "Bu soruda çevre bulmaya gerek var mı?" diye sorardım. " (Ö1-1. soru)"

Diğer yandan, bazı öğretmen adayları öğrencinin kavram bilgisine yönelik hatalı bilgilerini ve işlem hatasını fark ettirmeye yönelik sorular sorabileceklerini ya da çap-yarıçap, uzaklık ve çevre kavramları gibi matematiksel kavramların tekrar anlatılmasını içeren daha genel öneriler de bulunmuşlardır. Bu adayların açıklamaları ise sınırlı kanıt kategorisinde değerlendirilmiştir. Örnek olabilecek bazı adayların açıklamaları şöyledir;

"Eğer dönme dolap nehir yatağına teğet olsaydı uzaklık nasıl değişirdi? Uzaklık kavramında yanlışlık olduğu için böyle bir soru sorardım." (Ö8- 2. soru)

"Öncelikle birimler üzerinde duracak sorular sorardım. Burada bulmak istediğimiz birimin ne olduğunu fark ettirmesini sağlardım. Çember ile ilgili basit örneklerle başlardım. Onu anladığında hatasını fark edecektir." (Ö11-1. soru)

"Çevre formülü neydi diye sorarım ve çevresini hesaplayabileceği farklı sorular veririm. Bu soru için çevresini hesaplamadan yapılabilir mi diye sorardım." (Ö12-1. soru)

Yukarıda verilen örneklerde de görüldüğü üzere, öğretmen adayları öğrencilerin kavram bilgisi ve işlem bilgisine yönelik uygulamalar yaptırmak istediklerini söylemişlerdir. Öğretmen adayların açıklamalarının % 27'si bu şekilde sınırlı kanıt içermektedir.

Güçlü ve sınırlı kanıt sunan adayların yanı sıra, adayların açıklamalarının % 68'sinin yetersiz kanıt içerdiği tespit edilmiştir. Bu adaylar, açıklamalarında öğrencinin anlaması ile problem yapısını ilişkilendirmemişlerdir ve bir sonraki yapacağı adıma yönelik matematiksel bir gerekçe sunmamışlardır. Bu şekilde cevap veren adayların, öğrencinin matematiksel düşüncesini çok dikkate almadığı ve problem yapısına odaklandığı söylenebilir. Bu adaylar, problemde sayıları küçülterek problemin yapısını basitleştirme, şekil üzerinde verilen uzunluğun ne kadar olduğunu yazmama ve dönme dolabın yönünü değiştirme gibi problemin yapısına yönelik değişiklikler yaparak öğrenciye aynı problemi tekrar sorabileceklerini söylemişlerdir. Bu adaylardan bazılarının cevapları şu şekildedir;

> *"Öğrenciye belirli bir öykü içerisinde verilmiş, tek bir eksen boyunca hesaplanması gereken veriler verilir. Öğrenciden hikayeye uygun bir biçimde çözmesi istenir. (Ö5-2. soru)*

> *"Öğrenciye soru materyal haline getirilere sorulur. Ok yönü söylenerek döndürerek çözmesi istenir." (Ö7-1. soru)*

Verilen cevaplarda da görüldüğü üzere, adaylar problemin yapısı ile daha çok ilgilenmişlerdir ve uygulama odaklı öneriler sunmuşlardır. Diğer yandan bazı adaylar ise bir sonraki adımda öğrenciye sorabileceği problem durumlarını yazmışlardır ancak bu problemleri neden sorduğuna dair herhangi bir gerekçe sunmamışlardır. Soracakları problem ile öğrencide hangi matematiksel düşünceyi ortaya çıkarmak istediğini ya da destekleyeceği noktasında bir açıklama yapmamışlardır. Dolayısıyla bu adayların cevapları da yetersiz kanıt içerdiği şeklinde değerlendirilmiştir.

4. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu araştırmada, ortaokul matematik öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerileri, dikkat etme, yorumlama ve karar verme çerçevesinde incelenmiştir. Bu doğrultuda, araştırmanın en temel sonuçlarından biri öğretmen adaylarının, dikkat etme boyutunda, yorumlama ve karar verme boyutuna göre nispeten daha iyi seviyede olduğu yönündedir. Karar verme boyutunda ise oldukça zayıf oldukları görülmektedir. Öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin her bir boyutu ayrı olarak ele alınacak olursa, dikkat etme boyutunda adayların çoğunlukla sınırlı kanıt sundukları görülmektedir. Bunun nedeni ise adayların açıklamalarının, hem verilen problem durumunda hem de öğrencilerin stratejilerindeki önemli matematiksel detayları göz ardı ederek öğrencilerin yapmış olduğu işlemler çerçevesinde sınırlı kalmasıdır. Öğrencilerin stratejilerine dikkat etmede, cevabın doğru olup olmadığının belirlenmesi ya da yapılan işlem adımlarının tanımlanması yeterli değildir, bununla birlikte problem durumu için önemli matematiksel detayların neler olduğunun tespit edilmesi ve öğrenci stratejisinin bu bilgi çerçevesinde tanımlanması gerekmektedir (Jacobs vd., 2010). Bir başka ifadeyle öğretmenler, öğrenci çözümlerindeki matematiksel detayları fark edebilecek düzeyde matematik bilgisine sahip olmalıdır. Çalışmasında benzer sonuçlar elde eden Fernandez vd., (2013), öğretmen adaylarının öğrencilerin stratejilerindeki matematiksel detayları tanımlayamama durumlarını onların matematik alan bilgisinin zayıf olmasından kaynakladığı şeklinde açıklamışlardır. Bu çalışmadan elde edilen bulgular da bu düşünceyi destekler niteliktedir. Problem için gerekli matematiksel düşüncenin ne olduğunu belirleyemeyen ya da problemin çözümünde sadece doğru cevaba odaklanan adaylar, öğrencilerin cevaplarını da yüzeysel olarak tanımlamışlardır. Bu durum, bir sonraki adımda adayların öğrencilerin matematiksel anlamalarını yorumlama sürecini de etkilemiştir. Nitekim öğrencilerin cevaplarındaki matematiksel detayların tanımlanması, onların problem çözme sürecindeki matematiksel düşüncelerini doğru yorumlayabilmek için ilk adımdır (Fernandez vd., 2013).

Bu araştırmadan elde edilen bir diğer temel sonuç ise öğretmen adaylarının öğrenci cevaplarını yorumlama becerisinin zayıf olduğu ve sunmuş oldukları kanıtlarda öğrencilerin matematiksel anlamalarını çok yansıtmadığı şeklindedir. Özellikle yorumlarında, öğrencilerin problem durumunda verilen görseli okuyamadığı, işlemleri yapamadığı, sorunun çözümüne ilişkin pratik düşünemediği ve kullandığı yöntemin yanlış olduğuna ilişkin söylemlerle öğrencilerin yaşadıkları zorlukları ve işlemsel hataları vurgulamışlardır. Bununla birlikte açıklamalarında, öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerine yönelik, *zihinsel düşünme becerisi iyi değil, matematiksel kavrayışı çok yüksek deği*l gibi yüzeysel ve yargılayıcı ifadeler yer almaktadır. Tüm bu söylemler, adayların, öğrencilerin stratejilerini yorumlarken kavramsal bilgiyi göz ardı ettiklerini ve öğrencilerin hatalarının, zorluklarının arkasındaki matematiksel düşünceyi açıklayamadıklarını göstermektedir. Çalışmasında benzer bulgulara ulaşan Rhodes (2017), öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel düşüncelerine yönelik dikkat ettikleri detayların ve yorumlarının, verilen problem durumu ve kendi matematiksel bilgileri çerçevesinde olduğunu belirtmiştir. Belirtilen tespit ve bu araştırmada elde edilen bulgular dikkate alındığında, adayların, verilen problem durumunu anlayabilmek için ihtiyaç duydukları kavram bilgisinin eksikliği yorumlarının yüzeysel seviyede kalmasının sebeplerinden biri olabilir. Alan bilgisinin yanı sıra, öğrenci düşünce bilgisi gibi unsurların da adayların yorumlama becerilerini etkilediği söylenilebilir. Öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel düşüncelerini yorumlayabilmesi için, içerik bilgisinin gerekli olduğu kadar öğrencilerin nasıl düşündüğü bilgisini de kullanmaları gerekmektedir (van Es & Sherin, 2002). Öğrenci düşünce bilgisi, öğrencilerin belirli bir kavram hakkında ne bildikleri, kavram ile ilgili düşüncelerinin neler olduğunu ve öğrencilerde kavramın nasıl geliştiğini bilmeyi içermektedir (Hill, Ball & Schilling, 2008). Ancak elde edilen bulgularda adayların bu anlamda yeterli olmadığı görülmektedir. Adayların yorumlarının, öğrencilerin neyi yaptığından çok neyi yapamadığına yönelik olması bu görüşü destekler niteliktedir. Bu durum adayların öğrencilerin sahip olduğu matematiksel bilgi ve matematiksel düşüncelerini dikkate almadığının göstergesi olarak da ifade edilebilir. Oysaki öğretmenler öğrencilerinin düşüncelerindeki potansiyeli fark ettiği zaman bir sonraki adımını bu potansiyel üzerine inşa edebilir ve öğrencilerin matematiksel anlamalarını derinleştirebilir ve geliştirebilirler.

Çalışmadan elde edilen bir diğer sonuç ise öğretmen adaylarının öğretim sürecinde bir sonraki adımda yapacağı etkinliğe karar verme sürecinde, uygulama odaklı düşündükleri ve öğrencilerin düşüncelerinden ziyade kendi öğretim bilgilerini kullanma eğiliminde oldukları gözlenmiştir. Çok az sayıda öğretmen adayı öğrencinin matematiksel düşüncesini anlamaya yönelik sorgulama yapabileceğini ve onların matematiksel anlayışlarını değerlendirerek bu düşünceyi nasıl destekleyeceğine yönelik açıklamalarda bulunmuştur. Diğer adaylar ise öğrencilere, yaptıkları işlemleri anlamaya yönelik ve işlem hatalarını fark ettirmeye yönelik sorular yönlendireceklerini belirtmişlerdir. Mason (2002), bu tarz soruların öğrencilerin matematiksel düşüncelerini kullanmanın alternatif yollarını düşünmede yararlı olduğunu vurgulamıştır. Dolayısıyla, öğretmenlerin öğrencilerin düşüncelerini kullanabilmesi için soru sorabilme becerileri de önemli olmaktadır. Farkındalığın bu boyutuna ilişkin önemli olabilecek bir diğer sonuç ise adayların öğrencilerin matematiksel düşüncelerini desteklemeye yönelik kanıt sunmada dikkat etme ve yorumlama boyutuna göre daha zayıf oldukları yönündedir. Çalışmasında, benzer bulgulara ulaşan Gichobi (2013), bu durumu öğretmen adaylarının öğrenciler ile tecrübeleri olmamasından kaynaklandığı belirtmiştir. Nitekim karar verme, güçlü bir dikkat ve yorumlama becerisinin yanında, öğrencilerin matematiksel düşüncesinin gelişimini bilmeyi de gerektirir. Öğrencilerin matematiksel düşünce gelişimi bilgisi, onları bir adım daha ileriye götürebilmek için öğrencilerin düşüncelerini zorlayabilecek problem seçiminde gereklidir. Dolayısıyla, karar verme becerisi, dikkat etme ve yorumlama becerisine göre nispeten daha üst düzey ve zor bir beceridir.

Sonuç olarak, anlamlı öğrenme için öğretimin öğrencilerin matematiksel düşünceleri üzerine inşa edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, fark etme yaklaşımı öğrenci düşüncelerini anlamak ve öğretimin bu düşünceler üzerine inşa etmek için bir çerçeve sunmaktadır. Bu becerilerin desteklenmesi, matematik öğretimi ile ilgili uygulamalar için değerlidir. Öğretmen eğitiminde de öğretmen adaylarının bu becerilerinin gelişimine yönelik deneyimler yaşatmak ve sınırlı pedagojik alan bilgisi ile öğretime yönelik alternatif düşünceler geliştirebilme becerilerinin desteklemektedir. Bu yönde yapılan çalışmalar, adayların farkındalık becerilerinin kayda değer şekilde geliştirdiğini göstermektedir (Fernandez vd.,2013; Matamoros vd., 2013; Zapatera & Callejo; 2013). Bu bağlamda, öğretmen adaylarına, öğretim süreci ve öğrencileri gözlemleme fırsatları sunan öğretmenlik uygulamasının içeriğine dair bazı önerilerde bulunabilir.

Öğretmenlik uygulaması kapsamındaki söz konusu deneyimler, öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerine dair bilgilerinin zenginleşmesini, mevcut öğrenci düşüncelerine dikkat etme ve yorumlama yaklaşımlarını destekleyebilir niteliktedir. Ancak bu deneyimlerin, öğrencilerin matematiksel düşünceleri üzerine bir sonraki adıma karar vermede tek başına yeterli olmadığı yönünde bulgular mevcuttur (Jacobs vd., 2010). Dolayısıyla bir uzman eşliğinde, öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerini fark etmelerini destekleyecek uygulamalara yer verilmesi adayların gelişimi için daha etkili olacaktır (Ball, Sleep & Bass, 2009. Özellikle, örnek öğrenci çözümlerinin incelenmesine yönelik grup tartışmaları organize edilerek, adayların öğrencilerin olası matematiksel düşüncelerini, kavram yanılgılarını ve hatalarını derinlemesine konuşabilmeleri sağlanılabilir. Matematiksel yönü zengin olan sınıf içi tartışmalar, öğretmen adaylarına öğrenci düşüncelerini anlama ve yorumlama açısından değerli deneyimler kazandırmaktadır. Buradan elde ettikleri çıkarımlar ile bir sonraki adımda neler yapabileceklerine dair fikir yürütmeleri de önemli bir tecrübe olacaktır. Bunun yanı sıra, öğretim süreçlerinin analiz edilmesinin ve değerlendirmesinin yer aldığı video kulüp çalışmaları öğretmen eğitim programında yer alabilecek uygulamalara öneri olarak sunulabilir.

Bu araştırmanın sonuçları doğrultusunda ileride yapılabilecek çalışmalara yönelik şu öneriler sunulabilir; bu araştırma öğretmen adayları ile yapılmış olup benzer bir çalışma öğretmenlerle de yapılabilir. Diğer yandan, bu araştırmanın verileri öğretmen adaylarının yazılı ifadeleri ile sınırlıdır, bir sonraki çalışmalarda öğretmen adayları ya da öğretmenlerin sınıf içi veya farklı tartışma ortamlarında farkındalık becerileri incelenebilir. Bununla birlikte öğrencilerin matematiksel düşünceleri üzerine yapılan düzenli sınıf içi tartışmaların, adayların veya öğretmenlerin farkındalık becerilerini nasıl etkilediği incelenebilir.

Kaynaklar / References

Ball, D., Sleep, L., Boerst, T. & Bass, H. (2009) Combining development of practice and the practice of development of teacher education. *Elementary School Journal*, *109*(5), 458-474.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L, Levi, L. & Emson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Crespo, S. (2000). Seeing more than right and wrong answers: Prospective teachers' interpretations of students' mathematical work. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 155-181.

Creswell, J. W. (2014*). Araştırma deseni (S. B. Demir, Çev.)* Ankara: Eğiten Kitap

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 89-114.

Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2011). Development of prospective Mathematics Teachers' Professional noticing in a specific domain: Proportional Reasoning. *In proceedings of the 35 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 329-2336).

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759, DOI 10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1/2), 441.

Gichobi, M. N. (2013). *Examining elementary pre-service teachers' capacity to use children's mathematical understanding to select and pose mathematical tasks* (Doctoral Thesis). Iowa State University, Iowa.

Goldsmith, L. T. & Seago, N. (2011). Using classroom artifacts to focus teachers‟ noticing: Affordances and opportunities. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 169-187). New York: Routledge.

Goodwin, C. (1994). *Professional vision.* American Anthropologist, 96, 606–633.

Guner, P., & Akyuz, D. (2020). Noticing student mathematical thinking within the context of lesson study. *Journal of Teacher Education*, *71*(5), 568-583.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education,* 372-400.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L.C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202.

Kazemi, E. & Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics: Using student work to promote collective inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7,* 203–235.

Lester, F. K. (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Charlotte, NC: Information Age.

Lin, P.-J. (2006). Conceptualizing teachers' understanding of students' mathematical learning by using assessment tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4,*545–580.

Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37*(2), 247-271.

Llinares, S. & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(2), 177-196.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* New York: Routledge.

Matamoros, S.G., Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2013). Characteristic of pre–service mathematics teachers noticing of students mathematical thinking. *In ICERI2013 Proceedings–6th International Conference of Education, Research and Innovation"*, (s. 978-84).

McDuffie, A. R., Foote, M. Q., Bolson, C., Turner, E. E., Aguirre, J. M., Bartell, T. G. & Land, T. (2014). Using video analysis to support prospective K-8 teachers' noticing of students' multiple mathematical knowledge bases. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(3), 245-270.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) Uluslararası Öğrenci Başarılarını Değerlendirme Programı (2015). *PISA 2012 Örnek Matematik Soruları.* http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2015/02/pisa-ornek-sorular-matematik.pdf adresinden erişildi.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Osmanoğlu, A., Işıksal, M. & Koc, Y. (2012). Prospective teachers noticing with respect to the student roles underlined in the elementary mathematics program: use of video-cases. *Education & Science*, *37*(165).

Özel, Z., Işıksal-Bostan, M., & Tekin-Sitrava, R. (2022). Prospective Teachers' Instructional Responses on the basis of Students' Functional Thinking: The Context of Pattern Generalization. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *23*(2), 40-58.

Potari, D., Psycharis, G., Kouletsi, E., & Diamantis, M. (2011). Prospective mathematics teachers’ noticing of classroom practice through critical events. *In Proceedings of the Seventh Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2798-2807).

Rhodes, G. A. (2007). *Professional Noticing: How Do Teachers Make Sense of Students' Mathematical Thinking?* (Doctoral Thesis). University of Georgia.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers’ skills of attending, interpreting and responding to students’ understanding. *Educational Studies in Mathematics, 100*(1), 83–99.

Santagata, R. & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education, 43*(1), 133-145.

Schack, E., Fisher, M., Thomas, J., Eisenhardt, S., Tassell, J. & Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers’ Professional noticing of children’s early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 379-397.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Sherin, M. G. & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers’ Professional vision. *Journal of Teacher Education, 60*, 20–37.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R. & Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. In M.G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers’ eyes,* (pp. 3-13). New York, NY: Routledge.

Sims, L., & Walsh, D. (2009). Lesson study with preservice teachers: Lessons from lessons. *Teaching and Teacher Education, 25*(5), 724–733.https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.10.005.

Steinberg, R. M., Empson, S.B. & Carpenter, T. P. (2004). Inquiry into childrens' mathematical thinking as a means to teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*,237–267

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 49–70.

Star, J. R., Lynch, K. H., & Perova, N. (2011). Using video to improve mathematics' teachers' abilities to attend to classroom features: A replication study. *Mathematics teachers' noticing: Seeing through teachers' eyes.*

Tekin-Sitrava, R., Kaiser, G., & Işıksal-Bostan, M. (2022). Development of prospective teachers’ noticing skills within initial teacher education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(7), 1611-1634.

Ulusoy, F., & Çakırlu, E. (2021). Exploring prospective teachers’ noticing of students' understanding through micro-case videos. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*, 253-282.

van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-595.

van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers “learning to notice” in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24,* 244-276.

van Es, E. (2011). A framework for learning to notice student thinking. M. Sherin, V. Jacobs ve R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers’ eyes içinde* (s. 134-151). New York, NY: Routledge.

Zapatera, A. & Callejo, M. L. (2 013). Pre-service primary teachers’ noticing of students’ generalization process. *In Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 425-432).

Walkoe, J. (2014). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. Journal of *Mathematics Teacher Education, 18*(6), 523-550.